Euskara Zerbitzua
Ikasmaterialak

10

Gabirel Jauregi
Batxilergorako materialak

Logika sinbolikoa

Peru Urrutia Bilbao

EUSKO JAURLARITZA — GOBIERNO VASCO
HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE ETA IKERKETA SAILA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN, UNIVERSIDADES E INVESTIGACIÓN

Euskara Zerbitzua
Ikasmaterialak

Gabirel Jauregi Bilduma
Batxilergorako materialak

10

Logika sinbolikoa

Peru Urrutia Bilbao

EUSKO JAURLARITZA
GOBIERNO VASCO
HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE ETA IKERKETA SAILA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN, UNIVERSIDADES E INVESTIGACIÓN

Eusko Jaurlaritzaren Argitalpen Zerbitzu Nagusia
Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco

Vitoria-Gasteiz, 2009

Lan honen bibliografia-erregistroa Eusko Jaurlaritzako Liburutegi Nagusiaren katalogoan aurki daiteke:
http://www.euskadi.net/ejgvbiblioteka

ARGITARATUTAKO IZENBURUAK

1. Arte klasikoa. Grezia eta Erroma (iruzkigintzarako testuak).
2. Mikroekonomiaren oinarriak.
3. Energia baliabideak. 1. Batxilergo teknologikoa.
4. Arte marrazketa.
5. Oinarrizko mekanika: mugimenduen transmisioa, makina arruntak eta mekanismoak.
6. Sexismoa maitagarrien ipuinetan.
7. Filosofiaren historia.
8. XIX. eta XX. mendeetako gizarte filosofia.
9. Motorrak.
10. Logika sinbolikoa.

Argitaraldia: 1. a, 2009ko apirila

Ale-kopurua: 500

Argitaratzailea: Eusko Jaurlaritzaren Argitalpen Zerbitzu Nagusia
Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco
Donostia-San Sebastián, 1 - 01010 Vitoria-Gasteiz

Egilea: Peru Urrutia Bilbao

Fotokonposizioa: Eusko Printing Service, S.L.

Inprimaketa: Gráficas Santamaría, S.A.

ISBN: 978-84-457-2926-7

L.G. VI-79/2009

AURKIBIDEA

Sarrera 1

Hasi baino lehen, esan behar dugu lan hau IRALEren R400 programaren barruan kokatu behar dela, eta Andoni Duoandikoetxea izan duela tutore. Andoniren lana ezinbestekoa izan da lana burutzeko. Hasiera-hasieratik eman dizkigu aholkuak, zuzenketak proposatu dizkigu, laguntza eskaini digu diskurtso koherente, txukuna eta argia izateko; eta batez ere pazientziaz jokatu du lan honek gaur duen forma hartu arte. Horregatik guztiagatik: eskerrik asko, berari eta Dolaretxen izan ditudan gainerako irakasleei: Maite Bernaola, Jule Garmendia eta Juanjo Fernandez.

Lan honekin, betidanik gustatu izan zaigun gai bat jorratu nahi izan dugu: proposizioen logika eta haren dedukzioak. Gure ustez, gai hau ez da eliteko zoro batzuen burutazioa, baizik eta guztion egunerokotasunekoa, zeren, nahiz eta abstraktua izan, gaia gure eguneroko hizkuntza baino ez baita azken finean.

Denok hitz egin behar dugu gure eguneroko bizitzan, eta horrek gure arreta erakartzen du: zelan osatzen ditugu esaldiak?; entzuten duguna, zergatik gertatzen zaigu ulergarria?; hitz egitea, zergatik da gure bizitza bideratzeko baliabidea? Horrelako galdera asko egin dezakegu, eta guztiontzako erantzunak Logika (zehatzago esanda, Proposizioen Logika) ikertzean topa daitezke.

Proposizioen Logikak azaltzen digu zelan deskriba dezakegun hizkuntzarekin inguratzen gaituen mundua, zelan osatzen ditugun adierazpen proposizioak; eta bigarren alde bat: azaltzen digu zelan lor ditzakegun munduaren deskribapenarekin beste ideia berri batzuk, zelan lor ditzakegun arrazonamenduak adierazpen proposizioekin.

Askotan, kanpotik ikusita, desatsegina iruditzen zaigu Logika, baina guztiz kontrakoa da: gure eguneroko esperientziarekin lotuta dago; beraz, oso gai praktikoa da. Lan honetan, praktikotasun horri eustea izan da gure helburua, eta horretan saiatu gara: horrexegatik ipini ditugu hainbat adibide eta ariketa emandako azalpenak lantzeko.

Gaiaren aurkezpena antolatzeko, pertsona batzuen laguntza guztiz baliagarria izan zaigu eta hala eskertu nahi diegu, batez ere Rosa Broncano-ri, zeinek lan hau egiteko, adeitasun osoarekin, bere apunteak utzi dizkigun. Horrez gain, aipatu behar dugu Vicente Rodriguez Lozano, eta *Introducción a la Lógica simbólica* haren liburua. Biek eskaini digute egitura bat, eta adibide, ariketa eta ideia asko ere bai. Bien lanak oso era argi, praktiko, eta interesgarrian idatzita zeudelako.

Esparru jakin bat aukeratu, komunikazioaren esparrua, hain zuzen ere, eta aurreko paragrafoan aipatutako bi lan haiek uztartuz eta gure *uzta*ko adibide eta ariketa berriak sartuz osatu dugu lantxo hau. Hona hemen lortu duguna.

Izaki bizidunen komunikazioa 2

2.1. SARRERA

Jaiotzen garenetik, izaki bizidun guztiok komunikatzen gara elkarrekin. Komunikazioari esker, gure bizitzako arazo asko bideratzen ditugu; besteak beste, janaria bilatzen dugu (erleek, dantza baten bidez, janaria non dagoen esaten diete besteei), ihes egiten dugu arriskuetatik (apoek, sorbaldan erakusten dituzten koloreei esker, pozoidunak direla adierazten dute), laguntza eskatzen dugu (kumeek negar eginez deitzen dute ama), elkarrekin jolasten gara (txakurrek, etzanez, jolasteko prest daudela erakusten dute), bikotekidea bilatzen dugu (txakur emeak, bere usainez, araldian dagoela ematen du aditzera), gure seme-alabei heziketa ematen diegu (gurasoek, errieta eginez, umea zuzentzen dute), harremanetan jartzen gara (elkar musukatzen, besarkatzen eta laztantzen dugu). Hau da, komunikazioak zubi bat eraikitzen du gure eta besteen artean, eta horrela, zubi horri esker, erraztu egiten da gure bizitza: gai gara besteei zer behar dugun edo nahi dugun azaltzeko.

Baina benetako komunikazioa izateko, esan dugunaz gain, bada bigarren parte bat: itzulia. Igorleak mezua bidaltzen du, eta hartzaileak mezua jasotzen du; orduan, komunikazio hori nolabait biribiltzeko, hartzaileak erantzuna bidali behar du, eta horrela berriro hasten da komunikazioaren zikloa. Goragoko adibide batekin jarraitzearren, kumeak negar egiten du ama deitzeko, eta amak, negarra entzutean, kumeari begiratu eta gorputza harenganantz zuzentzen du entzun duela azaltzeko. Modu horretan, gero eta gehiago daki komunikazioaren partaide bakoitzak besteari buruz: gure adibidean, amak badaki kumeak bere beharra duela, eta kumeak badaki ama prest dagoela laguntzeko. Joko horri *feed-back* deitzen zaio, eta komunikazioaren prozesuaren funtsa da.

Tenis jokoan bezala, komunikazio prozesua partaide biren (edo gehiagoren) artean sortzen da, bat hasi eta bigarrenak erantzun, erantzun duenari lehen partaideak erantzuten dio, eta bigarrenak, orduan, berriz erantzun behar dio lehenari, eta abar:

- Kumeak: negar egiten du.
- Amak: kumeari begiratzen dio.
- Kumeak: indar handiagoz egiten du negar.
- Ama: kumearenganantz hurbiltzen da.
- Kumeak: besoak altxatzen ditu negar egiten jarraitzen duen bitartean.
- Amak:…..

Beraz, elkarri mezuak bidaltzea da komunikazioaren sustraia. Mezu hitzarekin besteari esaten dioguna adierazten dugu; beraz, komunikazio saio batean hiru elementu hartu behar ditugu kontuan: nork esaten duen, zer esaten duen, eta nori esaten dion. Beste era batean esanda:

- **Mezuaren igorlea:** komunikazioaren ekintza egiten duena da (gure adibidean, kumea).
- **Mezua:** bidaltzen den seinalea da (kumea txarto dagoela, gure adibidean).
- **Mezuaren hartzailea:** mezua hartzen duena da (ama, gure adibidean).

Hiru elementu horiek —mezuaren igorlea, mezua bera eta mezuaren hartzailea— ondo aztertzeko, beste kontzeptu batzuk definitu behar ditugu:

- **Kodea:** zeinuz eta arauz osatutako sistema bat da. Komunikazioa gauzatzeko, biek, bai igorleak bai hartzaileak, kode bera ezagutu eta erabili behar dute (gure adibidean, kumeak oihuak eta negarrak erabiltzen ditu mezua komunikatzeko, eta amak ulertu egiten dio, jakina).
- **Kanala edo bidea:** mezua bidaltzeko erabiltzen den bidea da. Mezua ondo ailegatzeko, kanalak libre egon behar du, oztopo barik, eta egokia izan behar du hartzaileak mezua ondo

aditzeko (entzumena eta ikusmena dira kanalak gure adibidean; zarata handia badago, amak ezin izango dio kumeari entzun, edo bien artean oztopo bat badago, amak ezin izango du kumea ikusi).

- **Testuingurua:** komunikazio prozesua gertatzen den ingurua edo egoera da. Mezua osatzeko, testuinguruak berak markatzen du erabiltzen ditugun zeinuen eta arauen egokitasuna (gure adibidean, jateko ordua bada eta kumea oraindik jan gabe badago, kumea goseak dagoela ulertuko du amak; era berean, kumea janda eta harri batzuekin jolasten badago, min hartu duela ulertuko du amak).

Lehen ikusi dugunez, komunikatzeko bide asko dago, baina gehienetan, eta kanalari dagokiolarik, bi mota bereizten ditugu nagusiki. Soinuak erabiltzea edo ez erabiltzea da bi horien arteko alderik nabarmenena:

- **Entzumenezko komunikazioa:** Igorleak, hots eginez, bere mezua bidaltzen du, ahoz ekoitzitako soinuak erabiltzen ditu mezua adierazteko, eta soinu horiek oihuak, garrasiak, irrintziak... izan daitezke, bai eta soinu artikulatuak ere (hau da, berbak). Beraz, mezuaren hartzaileak, entzuten duenari arreta jarriz, mezuaren zentzua antzeman behar du. Hemen kokatu behar ditugu gizakiek *asmatu* dituzten (hitzen bidezko) hizkuntza guztiak, hitz eginez erabiltzekoak. Adibidez, haurrek "¡Ama!" oihukatzen dute.
- **Entzumenez besteko komunikazioa:** Bigarren kasu honetan, igorleak ez du hotsik erabiltzen mezua bidaltzeko; keinuak edo bestelako ikus-mezuak eginez igortzen du mezua. Esaterako, gizakiok gorputzaren keinuak erabiltzen ditugu geure egoeraren berri emateko: haginak erakutsiz, eskuak mugituz, mihia ateraz…
  – Bigarren komunikazio mota honetan, kasu berezi bat aipatu behar dugu: idazketa. Berez, gizakion hizkuntza guztiak hitz eginez erabiltzekoak dira, baina gizateriak, behar bezainbeste garatu zenean, idazketa asmatu zuen (komunikatzeko oso bide sofistikatua), eta berari esker gai gara gaur egun idatziz ere elkarrekin komunikatzeko.

Eta, azkenik, kodeari dagokiolarik, bizidun izaki guztiek informazioa zabaltzeko erabiltzen dituzten zeinuak, normalean, bi motatakoak izaten dira:

- **Zeinu naturalak:** zeinu naturaletan, gertatzen denaren eta hori adierazten duen seinalearen artean harreman estua dago beti. Adibidez, oinatz bat ikusten dugunean, berehala konturatzen gara norbait pasatu dela hortik; trumoi bat entzuten dugunean, euria egin dezakeela ulertzen dugu; kea ikustean, sua dagoela pentsatzen dugu… Betidanik esan izan da animalien artean komunikatzeko zeinu naturalak baino ez direla erabiltzen; azken urteotan, ordea, ikerlari batzuk hasi dira aipatzen animalia batzuek (tximinoek bereziki) zeinu ez-naturalak erabiltzen dituztela beren arteko komunikazioetan. Gizakiok ere zeinu naturalak erabiltzen ditugu geure arteko harremanetan, adibidez: irribarre batekin poza azaltzen dugu, adiskidetasuna; tonu zakar batekin, berriz, geure haserrea adierazten dugu.
- **Zeinu arbitrario edo artifizialak:** zeinu hauetan ez dago harremanik gertatzen denaren eta hori adierazten duenaren artean. Kasu honetan sartu behar ditugu gizakiok erabiltzen ditugun zeinu gehienak: autoa gidatzeko kodea, zenbakien sistema, koloreen edo loreen hizkuntza, eta abar. Baina adibiderik garrantzitsuena gure hizkuntza guztiek osatzen dute: aldez aurretik, ez dago inolako arrazoirik gauza bat eta bera deitzeko erabiltzen dugun hitza elkartzeko. Adibidez: *mahai* hitza altzari bat izendatzeko erabiltzen da euskaraz, baina beste hizkuntzetan beste hitz batzuk erabiltzen dira: *mesa* gaztelaniaz, *table* ingelesez, *πίναϰας* grezieraz, eta beste. Ikusten dugunez, izen horiek guztiek esanahi bera dute, eta gauza berak izen ezberdinak hartzen ditu zein den hizkuntza, ikur horiek guztiak arbitrarioak direlako. Gure adibideko umeak *ama* hitza

oihukatuko du euskaraz hitz egitean, eta ez beste edozein soinu (*aka, uto...,* esate baterako); zeren eta hizkuntza honetan *ama* da zeinu egoki bakarra.

Nabaria denez, komunikazioaren fenomenoa oso konplexua eta interesgarria da, baina guk zati txiki bat baino ez dugu jorratuko: gizakien arteko komunikazioa. Kasu honetan, gizakien arteko komunikazioan, mezuaren igorlea eta mezuaren hartzailea pertsonak dira, biek menperatzen dute hizkuntza bera, eta, normalean, soinuz osatzen dute komunikazioaren prozesua.

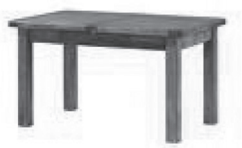
- Ariketak

Helburua: komunikazioa zer den eta zeinuak zein garrantzitsu diren azpimarratu nahi dugu.
1. Azaldu zertarako komunikatzen garen. Jarri adibide batzuk. 2. Zer elementu daude komunikazio prozesuan? Azaldu elementu bakoitza. 3. Zer motatako zeinuak erabiltzen ditugu komunikatzeko? Jarri adibide batzuk.

2.2. GIZAKIEN HIZKUNTZA

Inork ez daki nola sortu ziren lehenengo hizkuntzak, eta horregatik hipotesi asko plazaratu dira, gaitasun hau azaltzeko. Batzuek aldarrikatzen dute Jainkoaren (edo Jainkoen) *oparia* dela gizakiok dugun hizkuntzarako gaitasuna; harrigarria bada ere, oraindik orain, zientziaz kanpoko hipotesi hori da nagusi Estatu Batuetako zenbait eskolatan, esaterako. Beste batzuek, aldiz, Darwinen ekarpenari esker, uste dute espezieen eboluzioaren ondorioa dela. Dena dela, gaur egun, zientzialari guztiak ados daude datu honekin: gizakien hizkuntza *australopithecus* espeziearekin agertu zela (gutxi gorabehera orain dela 4.200.000 urte), eta *homo sapiens*arengan berezko ezaugarria bihurtu zela (orain dela 100.000 urte). Hizkuntza berezkoa daukagu, eta berarekin doan komunikaziorako gaitasuna ere bai.

Gizakien komunikazio prozesua aztertzeko, lehen aipatutako puntu guztiak eduki behar ditugu kontuan: *mezuaren igorlea-mezua-mezuaren hartzailea* alde batetik, eta bestetik kodea, kanala, eta testuingurua. Horien artean, kodea da giza komunikazioaren berezitasun garrantzitsuena. Ikusi dugu izaki bizidun guztiok komunikatzen garela, baina gizakiok bakarrik erabiltzen ditugu zeinu arbitrarioak helburu horretarako: horra hor gure ezaugarririk nabarmenena. Komunikatzeko ditugun kode nagusiak, hizkuntzak, zeinu arbitrarioz osatuta daude. Adibidez: *mahai* edo *table* hitzen eta altzari mota jakin baten artean ez dago zerikusirik, hitzarmen sozial bat baino ez.

/mahai/ 

Komunikatzeko erabiltzen dugun edozein zeinu artifiziali *sinbolo* deitzen zaio. Sinboloa da, beraz, kontzeptu bat, zeinaren bidez beste gauza bat adierazten den; beste hori edozein ideia —bai fisikoa, bai abstraktua— izan daiteke; haien artean (adierazlearen eta adieraziaren artean, hain zuzen ere) dagoen erlazioa arbitrarioa da. Gorago aipatu bezala, sinbolorik garrantzitsuenak hitzak dira.

Sinboloetan, beraz, hizkuntzaren sinboloak dira garrantzitsuenak. Berez, hizkuntza ez da sinbolo bat, sistema bat baino, gure komunikatzeko kodea osatzen duen sinbolo sistema, hain zuzen ere. Sinbolo (mahaia, aulkia, leihoa…) horietaz gain, arau konplexuz (nola erabiltzen diren sinboloak…) ere osaturik dago. Sinboloekin mundua irudikatzen dugu: gauzak, ideiak, nahiak…; arauekin, berriz, sinboloak erlazionatzen ditugu. Hizkuntzen bidez, sinboloak eta arauak osatzen duten sistemen bidez, gure ideiak, gure nahiak, sentimenduak… adierazten ditugu.

Izaki bizidun guztietan, gizakiok gara sinbolizatzeko gaitasuna daukagun bakarrak. Cassirer-ek (filosofo ospetsu bat) esan zuen bezala: beste animalia guztiek zeinu naturalak erabiltzen dituzte (adibidez: txakurrek zaunka egiten dute, txoriek kantatu, zaldiek irrintzi egiten dute…); gizakiok, berriz, sistema sinbolikoen bidez ere komunikatzen gara. Ezaugarri hori dela eta, gizakia "animalia sinbolikoa" dela esan dezakegu.

Erabiltzen ditugun sistema sinbolikoak konbentzionalak dira, asmatutakoak. Une bakoitzean, gizarteak bere ingurua, bere errealitatea, ulertu, azaldu eta eraldatu egin behar du; helburu horrekin, unean uneko sistema sinbolikoak sortzen ditu; beraz, sistema sinboliko horiek ez dira ezinbestekoak, konbentzionalak baizik. Denbora aurrera joan ahala, lehengo inguruko errealitatea aldatuz doa, beste mundu berri bat sortu arte, eta aldaketa horrekin batera, lehengo mundu hura azaltzen zuten sistema sinbolikoa ere aldatu egin behar da, gizakiok egoera berrira hobeto egokitzeko. Adibidez, orain dela mende batzuk gure mundua nekazarien mundua zen, baserri mundua, eta hitz asko geneuzkan mundu horretan murgiltzeko, mundu hori deskribatzeko, baina, zoritxarrez edo zorionez, beste mundu bat sortu da, guztiz hiritarra, non aspaldiko hizkuntza, aspaldiko sistema sinbolikoa, ez zaigun batere aproposa gertatzen bizimodu berria islatzeko; halaxe asmatu edo mailegatu behar izan ditugu hainbat hitz eta itzulinguru mundu hiritar hau deskribatzeko. Bizimoduak aldatu egiten dira, eta zenbaitetan azkar aldatu ere: zientzia, teknologia, ohiturak... (eta, azken finean, ideiak) aldatu egiten direlako. Horrela, hitz asko desagertzen diren legez, beste hitz ugari agertzen dira. Oso mugikorra edo aldakorra dira sinbolozko gure hizkuntzak.

Gure hizkuntza konbentzionala eta mugikorra denez, ez dugu berezkoa, ez gara jakituria horrekin jaiotzen, eta horrexegatik gaude behartuta ikasteko eta barneratzeko. Bi bide dauzkagu horretarako: hizkuntza propio ikastea eta besteek nola egiten duten errepikatzea.

Laburbiltze aldera, gizakien edozein hizkuntzak ezaugarri hauek ditu:

1. **Ikasitakoa** da. Gizakiok hizkuntzarako gaitasuna daukagu kode genetikoan, ez hizkuntza bat; bestela, denok hitz egingo genuke modu bertsuan: ikasi egin behar dira, beraz, hizkuntzak. Baina, aldi berean, gauzak horrela izanda, edozein egoeratara egokitu daiteke hizkuntza, eta belaunaldiz belaunaldi garatzen da.
2. Hizkuntza **sinbolo**en bidez eraikitzen da, hitzen bidez hain zuzen ere.
    - Objektuaren eta sinboloaren arteko erlazioa arbitrarioa edo **konbentzionala** da. Sinbolo guztietan harreman estu-estua dago adierazlearen (zeinuaren osagai materiala) eta adieraziaren (ulermenezko osagaia) artean, eta harreman edo lotura hori konbentzionala da (ez dago naturazko loturarik).
    - **Kontzientea** da: giza talde bakoitzak hitzak eta haien esanahiak ezarri, eta onartu egiten ditu, denak izan daitezen elkarri ulertzeko gai.

- **Unibertsala** da: hitz bakoitza baliagarria da bai hitza bera bai eta harekin izendatutako gauza edo egoera guztiak ere sinbolizatzeko. Horrela, hitz gutxirekin gauza edo egoera asko izenda ditzakegu.

3. **Emankorra** da. Hizkuntza bat erabiltzen dugunean, sinboloak eta arauak erabiliz, etengabe eraikitzen ari gara mezu berriak, ordura arte beste inork egin gabeak.

Baina, beste ikuspegi batetik, hizkuntza sistema osotzat har dezakegu. Ikuspuntu horretatik ikusita, hizkuntzen ezaugarrietako bat, oso garrantzitsua ekarriko dugu hona.

Jakin behar dugu badagoela harreman estu bat hizkuntzaren eta pentsatzeko moduaren artean: hizkuntza barik, ezinezkoa bihurtzen da pentsatzea. Hizkuntzaren bidez bideratzen eta espresatzen ditugu gure pentsamenduak. Baina hizkuntza guztiek, gure aurrekoek landu eta gero jasotzen duguna direnez, bi aurpegi dituzte: autoritatezkoa alde batetik, eta aukera emailea bestetik.

- **Autoritatezkoa** da: hizkuntzak erabat mugatzen eta baldintzatzen gaitu. Adibidez: gure ingurua ulertzeko, hizkuntzak lexiko mugatua eskaintzen digu, hitzen *corpus* horrekin azaldu behar dugu munduan igartzen duguna. Beraz, euskaraz hitz egitean, ikusten ari garen zuhaitz baten hostoak deskribatzeko, arlo semantiko bateko adjektibo batzuk (berdea, horia, marroia, nabarra…) eta bestelako arloetako beste batzuk (iluna, argia…) erabil ditzakegu, baina beste hizkuntza batek beste hitz batzuk eskainiko dizkigu, agian aproposagoak, edo ez. Gure pentsamenduak hizkuntza baten bidez adieraztera behartuta gaude. Adibidez: esan ohi dute *inuitek* hogei hitz baino gehiago dauzkatela kolore zuria adierazteko; guk, bat baino ez (hala ere, findu egin beharko genuke horiek esandakoa, ez baitago argi hogeitik gorako hitz horiek nola banatzen diren sistema barruan, ez eta euskaraz berba bat baino ez dugula haiek guztiek betetzen duten eremu semantikorako).
- **Aukeraemailea** da: hizkuntza bat jakinduria eskerga eta ordainezina da: gure arbasoek landu dutena (ikasi, ulertu, asmatu) oparitzen digute hitz eginez. Hizkuntzari esker, ez dugu behin eta berriz zerotik hasi beharrik. Baina jakinduria hori modu batean edo bestean erabil dezakegu: nolabaiteko askatasuna (ez erabatekoa) daukagu tradizio hori erabiltzeko. Erabaki dezakegu hitz batzuk erabiltzea, beste batzuk baztertzea... Beraz, mundua ulertzeko eta gure gizartean moldatzeko laguntza ematen digu hizkuntzak, eta horren bitartez gu ere bihurtzen gara protagonista prozesu horretan.

Dena dela, jakin behar dugu, hizkuntzek eta haien hitzak bizirauteko, ezinbestekoa dela gizakiok onartzea, berrestea eta lantzea; bestela, desagertu egin daitezke.

Hizkuntza ikasita eta barneratuta, gure bizitza bideratzeko erabil dezakegu: behar eta nahi duguna azalduko dugu; geuk aukeratuko dugu zer esan, nola, eta non. Batzuetan egia esanez eta beste batzuetan gezurra, saiatuko gara gure nahiak betetzen. Beraz, gizakiok mezu asko egin ditzakegu, eta mezu horiek baliagarriak izango dira informatzeko eta bai engainatzeko ere (desinformatzeko).

Beste alde batetik, bizikidetzan, ezinbestekoa da geure burua eta besteak onartzea. Egiten, sinesten, erabakitzen eta hartzen ditugun bideak komunikatu eta justifikatu behar ditugu. Horri guztiari argudiatzea edo arrazoitzea deitzen zaio. Argudiatzea oso garrantzitsua da gure jokaera (gure jarrera) besteen aurrean defenditzeko edo sustatzeko.

Beraz, esan dugunez, hizkuntzak pentsatzeko gai egiten gaitu, eta aukerak ematen dizkigu mundua eta geure burua azaltzeko eta justifikatzeko, nahiz eta azalpen hori gezurra izan.

Bizi garen gizartean, edozein delarik ere, gutxienez hizkuntza bat erabiltzen dugu geure artean komunikatzeko eta geure ideiak espresatzeko. Geure komunitatean erabiltzen dugun hizkuntzari *hizkuntza* *naturala, jatorri hizkuntza* edo *ama hizkuntza* deitzen diogu. Adibidez: euskara, gaztelania, frantsesa, swahilia, japoniera...

Hizkuntza naturalak oso aberatsak dira, eta haien bidez komunikatzen gara elkarrekin, baina askotan, nahiz eta oso aberatsak izan, nahiko anbiguoak izan daitezke, nahi dugun informazioa zehatza emateko, eta askotan nahasten gara, erabiltzen ditugun perpausek zer esan nahi duten ondo ulertzen ez dugunean. Horregatik, hizkuntza naturalak, paradoxaz, gaizki-ulertuz, eta anbiguotasunez beteta daude.

Hizkuntza naturaletan sor daitezkeen arazoak:

Arazo mota	Adibidea	Zalantzak
Polisemia	"Atzo *banku* batean egon nintzen."	Zer bankutan, parkean dagoen jesartzeko banku batean, ala dirua gordetzeko leku batean?
Metaforak	"Baserritarra, *segapotoa* eskuan hartuta, berba egiten hasi zen."	Zer segapoto, eskuko telefonoa, ala zorroztarria gordetzekoa?
	"*Gautxori* horrek ez zuen bere habian lo egin atzo."	Zer gautxori, hegaztia ala parranderoa? Zer habi, ohea ala animalien etzalekua?
Termino esanahi subjektibo bidez definituak	"Athleticek 2-0 irabazi zion Mungiako Futbol Taldeari!"	Zer esan nahi dugu horrekin, emaitza hori merituzkoa izan zela, ala erridikulua egin zuela Athletic-ek? Nork entzuten duen, modu batera edo bestera interpretatuko du.
Esanahi askotako perpausak edo anbiguoak	"Ehiztaria jaten ari zen lehoiak apurtuta zeukan hanka bat."	Zeinek zer jan zuen: ehiztariak lehoia ala lehoiak ehiztaria?
	"Peruk etxera eroan zuen Arantza."	Noren etxera, Peruren etxera ala Arantzarenera?

Gizakiok, hizkuntzek berez dituzten *oztopo* horiek kontuan hartu, eta haietan estropezu ez egiteko, beste hizkuntza batzuk asmatu ditugu non termino guztiek ondo definituta egon behar duten: *hizkuntza artifizialak* deitzen diegu, eta gauzak zehatz-mehatz espresatzeko eginda daude; adibidez, matematikako hizkuntza, fisikakoa, biologiakoa… eta abar. Termino bakoitzak bere esanahia hartzen du jakintza arlo bakoitzean, eta ez da anbiguotasunik sortzen.

Esan dugunez, eta laburbiltze aldera, hizkuntza erabiltzen dugu mundua adierazteko eta eraldatzeko. Horrela, erabilpen anitzeko tresna da hizkuntza. Horri dagokiolarik, jakin behar dugu hizkuntza guztiek bost funtzio dituztela:

1. **Errepresentatiboa.** Zeinu linguistikoak sinboloak direnez, gauzak irudikatzeko erabil ditzakegu, eta informazioa objektiboki transmititzeko.

2. **Adierazkorra.** Zeinu linguistikoak sintomak direnez, hiztunaren barne egoeraren berri eman nahi dute.
3. **Deitzailea.** Zeinu linguistikoak solaskideari bidalitako seinaleak dira, eta solaskidearen nolabaiteko erantzuna bila dezakete.
4. **Poetikoa edo asmatzailea.** Zeinu linguistikoekin, mezu berriak eta ederrak asma ditzakegu.
5. **Metalinguistika.** Hizkuntzaren bidez, gizakiok hizkuntzaren gainean hausnar dezakegu.

Aditu gehienek esaten dute azken bi funtzio horiek (poetikoa eta metalinguistikoa) gizakien hizkuntzetan bakarrik aurki ditzakegula. Baina, dena dela, etologo batzuek baieztatzen dute animalien beste zenbait espezietan ere agertzen direla, batez ere, *pongido*en familian (giboia, orangutana, gorila, bonoboa eta txinpantzea; eta, zer esanik ez, desagertutako gizakien espezieak).

- Ariketak

HELBURUA: Zertarako komunikatzen garen gizakiok eta zein diren gure komunikazioaren ezaugarriak azpimarratu nahi dugu:
1. Zertarako erabiltzen ditugu hizkuntzak gizakiok? Jarri adibide batzuk. 2. Zergatik mugatzen gaitu hizkuntzak? Azaldu zure erantzuna. 3. Zein ezaugarri dituzte gizakien hizkuntzek? Aipatu hiru puntu inportanteenak. 4. Azaldu hizkuntzaren funtzioak. 5. Zer akats eduki ditzakete hizkuntza naturalek edo ama hizkuntzek?

Logika sinbolikoa 3

3.1. SARRERA

Hizkuntza ez-naturalen artean, logikako hizkuntza kokatzen da, eta pentsamendu eta arrazoimenaren munduan sakontzea da haren helburua. Geure buruari egin diezaiokegun galdera bat da ea zelan sortzen den logika, edo beste era batera esanda: zelan osatzen dugu geure pentsamendua, munduaren egitura ulertzeko gai izan gaitezen? Bada, logikako hizkuntza arrazoibideak, argudioak, dedukzioaren arauak… aztertzeko asmatuta dago, bai eta hizkuntzaren forma eta legeak ere.

Errealitatea ulertzeko, gure burmuinak esfortzu bat egin behar du, estrategia bat eduki behar du (kontzeptuak, arrazoibideak, judizioak… eraiki behar ditu), eta hori guztia ikertzen du logikak.

Logikarien ustez, denok daukagu modu bera mundua edo unibertsoaren egitura (gu ere bagaude unibertso horren barnean) ulertzeko. Eta aldi berean, ados daude daukagun pentsamendu egiturarekin barneratu edo uler dezakegula unibertsoak daukan egitura logikoa. Hortaz, mundua (objektua) logikoa bada eta guk (subjektua) hizkuntza logikoa erabiltzen badugu, ulertuko dugu nolakoa den munduaren egitura.

Modu horretan, gure pentsatzeko modua eta argudiatzeko arauak aztertzen eta menperatzen baditugu, unibertsoaren egitura nolakoa den jakin ahal izango dugu.

Logikarien iritzian, lengoaiaren mugetan daude pentsamenduaren mugak, esaten dugunaren eta idazten dugunaren mugetan. Beraz, gizakiok gai izaten gara unibertsoaren egitura ulertzeko, logika egiturak erabiltzen baditugu, bai hausnartzen dugunean, bai lengoaia perfektu bat erabiltzen dugunean. Horrela, unibertsoari buruz arrazoitzen dugunean eta hizkuntza egoki batean (hau da, logikako hizkuntzan) espresatzen baditugu gure arrazoibideak, batera joango dira unibertsoaren egitura eta gure ulertzeko modua.

Logikaren historiari begiraldi bat egiten badiogu, konturatuko gara Aristotelesek asmatu zuela logika, berak jarri zituela logikaren zutabeak:

- Logika formala eta ez-formala bereizi zituen.
- Falaziak ikertzen hasi zen (falaziak dira argudio batzuk, nahiz eta zuzenak diruditen, okerrak izaten direnak).
- Silogismoen teoria asmatu zuen (silogismoa arrazoibide deduktibo bat da, gutxienez hiru proposizio dituena: bi premisa eta ondorio bat).
- Konturatu zen lengoaia naturala aztertzea zela logika.

Aristotelesen idatziak oso inportanteak izan ziren logika formulatzeko, eta XIX. mendera arte ikasi ziren. Logika horri, logika tradizionala edo aristoteliko-tomista deitzen diogu.

XVII. mendean, Leibniz-ek, nahiz eta Aristotelesen logika (logika tradizionala edo aristoteliko-tomista) onartu zuen, zientzia bihurtu nahi izan zuen, matematika gisa; horrela, logika hobeto garatzeko, sinbolizatu egin zuen, eta ondorioz logika kalkulu bihurtu zen, eta beraz tresna praktikoagoa eta seguruagoa eskuratu genuen. Dena dela, ezin izan zuen eraiki sinboloen sistema bat, baizik eta horren proiektu bat bakarrik.

XIX. mendean agertu zen benetako logika modernoa edo sinbolikoa, batez ere Boole-ren (Boole-ren ustez, kalkuluak eta eragiketak egitea zen logika), Frege-ren, Peirce-ren (egia taulak asmatu zituen) eta Russell-en ekarpenekin. Ikertzaile horiek guztiek logika sinbolikoaren arloan lan egin zuten, eta aurrerapen itzela ekarri zuten, izenak, aditzak eta haien arteko harremanak sinboloz aldatu zituztenean.

Logikak, funtsean, dedukzioen eta argudioen koherentzia ikertzen du. Baina logika mota asko dago, batez ere:

- Hizkuntza arrunta erabiltzen duena: kasu honetan, hitzak aztertzen dira, bai eta hitzok elkartzeko arauak ere. Horrela, osatzen ditugun esaldiek esanahi aproposa izan behar dute: esaldi bakoitzak bere esanahia du, eta esanahi horrekin jokatu behar dugu ezinbestean.
- Sinboloak erabiltzen dituena: kasu honetan, pentsamendua eraikitzeko erabiltzen ditugun arauak baino ez dira aztertzen. Azterketa honetan erabiltzen diren sinboloen esanahia edozein izan daiteke.

Hemen landuko dugun logika, logika sinbolikoa edo matematikakoa izango da, eta logika sinbolikoaren barruan, batez ere, proposizioen logika landuko dugu.

3.2. PROPOSIZIOEN LOGIKA

Arrazoiketak zenbait esaldiz osatuta egoten dira. Oro har, esaldi guzti-guztiak **proposizioak** dira, adierazpen perpausak hain zuzen ere, egiazkoak edo gezurrezkoak izan daitezkeen esaldiak. Esaldi horietako bat, gainerakoen **konklusioa** izaten da; eta gainerako esaldi horiek guztiak, **premisak** dira. Hortaz, logika sinbolikoak arrazoibideen barruan aztertzen duen osagairik txikiena proposizioa da. Horrela, logika mota horri, proposizioekin lan egiten duenez, **proposizioen logika** deritzogu.

Dakigunez, perpaus mota asko dago:

• galderak: “Zer demontre egiten ari naiz hemen?”
• aginduak: “Atera nazazu hemendik!”
• harridurazkoak: “Zer poza, Retegik irabazten badu!”
• adierazpenekoak: “Gaur, hotza eta euria egiten ari du”

Nahiz eta perpaus mota horiek guztiak egon, proposizioen logikak ez ditu perpaus guztiak lantzen: **adierazpen** perpausekin bakarrik egiten du lan, egiazkoak edo gezurrezkoak izan daitezkeelako. Proposizio bat, hortaz, adierazpen perpaus bat da, hau da, egiazkoa edo faltsua izan daitekeen adierazpen bat.

Dena dela, bi motatako adierazpen perpausak bereizi behar ditugu:

- **Proposizio enpirikoak**. Perpaus hauetan, egia edo gezurra oso lotuta dago errealitatearekin. Hau da, enuntziatuek gertakariei egokitu egon behar dute, eta hori egiaztatzeko zentzumenetara jo behar dugu.

  Adibidea

• “Euria ari du” perpausa egiaztatzeko, egiazkoa den ala ez jakiteko, errealitateari bakarrik erreparatu behar diogu.

- **Formazko proposizioak**. Perpaus hauek ez dituzte esperientziazko gertakariak kontuan hartzen, arrazoibideen eta argudiatzeen formak baizik. Barne koherentziaren arabera arautzen dira, kanpoko gertakariei erreparatu gabe.

Adibidea

- Aritmetikan, “3 + 5 = 8”. Perpaus hori egia ala gezurra den jakiteko, kalkuluaren koherentzia aztertu behar dugu.

Proposizioen logikak, nahiz eta errealitatean ere praktikan aplika daitekeen, egituraren forma edo arrazoibideen formak aztertzen ditu, eta ez zaizkio interesatzen edukiak, **kalkuluak** baizik; hori dela eta, **zientzia formala** dei dakioke. Beraz, arrazoiketetan sakontzen du, nola argudiatzen dugun, zer forma edo egitura mota daukaten gure argudioek, eta zer arau erabiltzen ditugun arrazoiak ematen ditugunean.

3.2.1. Proposizioen logikaren sinbolizazioa

Bi proposizio mota daude:

1. **Bakunak, sinpleak** edo **atomikoak**: “atzo eskolara joan nintzen”. Proposizio hauek letra xehe edo minuskulez sinbolizatzen dira: p, q, r, s, t,...
2. **Konposatuak** edo **molekularrak**: proposizio atomikoak konektatzaileen bidez elkartuz sortzen dira. Ad.: “gaur mendira joan naiz, **eta** euria egin du”.

Proposizioen logikak konektatzaile hauek bereizten ditu:

- *ez* (berez, ez da konektatzaile bat, proposizio bakunen gainean eragiten baitu)
- *eta*
- *edo*
- *ba-…, orduan ...*
- *baldin eta soilik baldin ba-…, orduan ...*

Azal dezagun zehatzago zer den konektatzaile bakoitza:

1. **Ezeztatzailea** (“ez”). Ikur hauekin sinbolizatzen da: “-” eta “¬” (guk, lehenengoa erabiliko dugu). Proposizioaren aurrean ipintzen da “-p”, eta “*ez p*” edo “*ez da p*” irakurtzen da.
2. **Konjuntzioa** (“eta”). Ikur honekin sinbolizatzen da: “$\wedge$”. Bi proposizioren artean ipintzen da: “p $\wedge$ q”, eta “*p eta q*” irakurtzen da.
3. **Disjuntzioa** (“edo”). Ikur honekin sinbolizatzen da “$\vee$”. Bi proposizioren artean ipintzen da: “p $\vee$ q”, eta “*p edo q*” irakurtzen da.
4. **Baldintza** (“ba-…, orduan ...”). Ikur honekin sinbolizatzen da: “$\rightarrow$”. Bi proposizioren artean ipintzen da: “p $\rightarrow$ q”, eta “*baldin p bada, orduan q*” irakurtzen da.
5. **Baldintzabikoa** (“baldin eta soilik baldin ba-…, orduan ...”). Ikur honekin sinbolizatzen da: “$\leftrightarrow$”. Bi proposizioren artean ipintzen da: “p $\leftrightarrow$ q”, eta “baldin eta soilik baldin p bada, orduan q” irakurtzen da.

- Konektatzaile logikoak

Konektatzailea	Irakurketa	Sinbolizatzeko ikurra	Adibidea	
Ezeztatzailea	ez	-	-p	*ez p*
Konjuntzioa	eta	∧	p ∧ q	*p eta q*
Disjuntzioa	edo	∨	p ∨ q	*p edo q*
Baldintza	ba-…, orduan ...	→	p → q	*baldin p bada, orduan q*
Baldintzabikoa	baldin eta soilik bal-din ba-…, orduan ...	↔	p ↔ q	*baldin eta soilik baldin p bada, orduan q*

Sinbolo osagarriak: proposizioen logikan, “( )” parentesiak, “[ ]” kako zuzenak, eta “ ” dedukzio ikurrak ere erabiltzen dira (“ ” ez dugu erabiliko guk lan honetan).

3.2.2. Nola itzuli hizkuntza naturaletik hizkuntza formalera

Hizkuntza naturala proposizioen logika bihurtzeko, logikaren sinboloak erabili behar ditugu; horretarako, arau hauei jarraitu behar diegu:

1. Hizkuntza naturalaren proposizio bakun bakoitza letra minuskula batekin sinbolizatzen da (p, q, r, s...), gorago esan dugun bezala.

Adibidea

- “Andoni mendizalea da” = “p”

2. “ez”, “ez da egia”, “ez da gertatzen”, “ez da posible…” bezalako adierazpenak minus sinboloarekin idazten dira: “-”.

Adibideak

- “ez da egia Ander ikaslea dela” = “-p”
- “atzo ez nintzen tabernara joan” = “-q”
- “ez da posible bihar euria egitea” = “-r”

3. Hizkuntza naturalaren “eta”, “baina”, “ezta … ere” bezalako adierazpenak, “^” ikurraren bidez aldatzen dira.

Adibideak

• “euria egiten du eta eguzkia ateratzen ari da” = “p ∧ t”
• “asko jan dut baina gose naiz” = “r ∧ s”

4. “Edo”, “bai … bai”, “…zein…” bezalako hizkuntza naturaleko adierazpenak “v” sinboloaren bidez islatzen dira.

Adibidea

• “etxean geratuko naiz irakurtzen edo hondartzara joango naiz” = “p ∨ q”

5. “ba…, orduan ...”, “…, eta hortaz, …”, “…, eta ondorioz, …” “…, eta beraz, …” bezalako adierazpenak “→” ikurrarekin aldatzen dira.

Adibideak

• “azterketa gainditu gero, kristoren parranda egingo dut bihar” = “p → q”
• “euria egiten badu, uholdeak edukiko ditugu” = “r → s”
• “Durangora joango naiz bihar bazkaltzera; hortaz, paseo bat egingo dut Urkiolan goizean” = “t → u”

6. “baldin eta soilik baldin…, orduan...”, “↔” sinboloaren bidez itzuli behar da (egia esan, honelakorik ez da erabiltzen eguneroko hizkuntzan).

Adibidea:

• “Idazle bihurtuko zara baldin eta soilik baldin liburuak idazten badituzu” = “p ↔ q”

3.2.3. Kako zuzenak eta parentesiak erabiltzeko arauak

Kako zuzenak eta parentesiak logika adierazpenetan agertzen diren konektatzaile batzuen eragiketak lehenesteko erabiltzen dira.

Adibide batekin azalduko dugu esandakoa. Desberdinak dira, esaterako,

$p \wedge (r \vee s)$
eta
$(p \wedge r) \vee s$

nahiz eta bietan agertu hiru proposizio berdin eta bi konektatzaile berdin: lehenengoan, konjuntzioa da eragiketa nagusia; bigarrenean, ostera, disjuntzioa.

Beste adibide batzuk:

• $-[(p \wedge s) \rightarrow -r]$: proposizio hau baldintza bat da, ukatuta.
• $p \wedge (s \wedge r)$: proposizio hau konjuntzio bat da.
• $(p \wedge s) \rightarrow r$: proposizio hau baldintza bat da.
• $(p \vee r) \leftrightarrow (p \vee r)$: proposizio hau baldintzabiko bat da.
• $(p \wedge s) \vee (q \wedge r)$: proposizio hau disjuntzio bat da.

- Ariketak

Ariketa hauekin, Proposizioen Logikaren esparruan eman ditugun kontzeptu guztiak landu nahi ditugu.

1. Esan ea honako proposizio hauek logikako proposizioak diren, eta direnak proposizioen logikara itzuli.
a. Hau lotsa!
b. Barakaldora etorri nintzenean, ikaratu egin nintzen.
c. Non demontre dago benetako botikaria?!
d. Rimbaud etorri da zutaz galdezka, eta zu lotan egon zara.
e. Zenbat urte dituzu?
f. Mendira edo hondartzara joan dira.
g. Ezkondu nintzenean, euria eta hotza egin zuen.

h. Oporretan joaten naizenean, ez dut kirolik egiten baina asko irakurtzen dut.
i. Kutsadura dagoenean, ezin dut arnasarik hartu eta eztulka hasten naiz.
j. Erosketak egiten baditut, ez naiz nekatzen baina diru asko gastatzen dut.
k. Joan zaitez antzarrak ferratzera.
l. Kirolik egin ezean, ahul eta lodi sentitzen naiz.
m. Zer jango dugu gaur?
n. Janaria prest dago.
o. Zoaz ohera.
p. Bihar etorriko zara?

2. Itzuli hizkuntza formalera:
a. Logika atsegin baduzu, ordenatu behar dituzu zeure ideiak.
b. Negar egiten dudanean, ez dut malkorik isurtzen.
d. Ezin naiz lokartu etsaminetan pentsatzen dudanean.
e. Ez da egia hotz egiten duenik.
f. Zirkuluaren koadratura ezinezkoa da.
g. Bai zuk esan duzuna bai nik esan dudana faltsuak dira.
h. Ariketa hauek ez dira oso zailak, baina ez zaizkigu gustatzen.
i. Ez da egia kantatu eta dantzatu zutela.
j. Ez dizut sinesten diozuna, baina, hala ere, zutaz fidatzen naiz.
k. Iritsi, ikusi, eta garaitu zuen.
l. Ezin diezazuket debeka, ezta baimena eman ere.

m. Bero edo epel zerbitzatuko da salda.
n. Gezurra da zure lehengusuak etorri direla eta zuek Parisa joan zaretela.
o. Euria egin duela egia ez bada, eta elurra egiten ari dela ere egia ez bada, orduan kalea ez da bustirik egongo.
p. Ez da posible mintzatzea eta kantatzea batera.
q. Zoriontsuak izateko eta geure bizitza antolatzen ikasteko, filosofiara jo behar dugu.
r. Errealitatearekin harritzen garen bakoitzean eta zalantzak dauzkagun bakoitzean, filosofatu egiten dugu.
s. Jaka jantzi eta gerrikoa estututakoan, kalera joan zen.
t. Altxatu zenean, salto egin eta kale kantoira abiatu zen.
u. Berandu denez eta logura naizenez, oheratu egingo naiz.

3. Osatu formula hauek parentesiak (eta, behar izanez gero, kako zuzenak ere bai) ipiniz...

a. ... disjuntzioak izan daitezen:

- $p \wedge t \vee -r \wedge s$
- $-r \vee s \rightarrow t$
- $p \leftrightarrow -r \wedge s \vee -t$
- $s \vee r \rightarrow -t$
- $-m \leftrightarrow t \vee r \rightarrow s$

b. ... baldintzazkoak izan daitezen:

- $p \wedge s \vee r \rightarrow -t$
- $r \vee s \rightarrow -r \wedge t$
- $-p \rightarrow -r \leftrightarrow s$
- $r \rightarrow -t \wedge s$
- $m \vee -s \rightarrow t \vee -r$

d. …konjuntzioak izan daitezen: • $r \vee s \rightarrow t \wedge k \rightarrow s$ • $p \leftrightarrow -t \wedge -r \rightarrow f$ • $p \rightarrow m \wedge s \leftrightarrow -r$ • $s \vee -z \wedge m \leftrightarrow -t$ • $-m \wedge -r \leftrightarrow s$
e. …baldintzabikoak izan daitezen: • $-r \vee s \leftrightarrow -m \wedge t$ • $p \wedge -m \leftrightarrow -t \rightarrow -k$ • $t \vee -b \leftrightarrow -t \wedge -r$ • $-z \wedge -k \leftrightarrow -t \vee -m$ • $r \leftrightarrow -m \vee t$

4. Sinboliza itzazu:
a. baldin p bada, orduan m
b. p eta r badira, orduan -r
d. baldin p eta m badira, orduan r edo ez s
e. baldin p bada, orduan r; eta baldin r bada, orduan p
f. ez da p eta r gertatzen
g. p, orduan m
h. baldin eta soilik baldin k eta ez p, orduan r edo ez s
i. r, orduan p
j. p edo ez t
k. p, orduan m; eta r, orduan ez t
l. p eta ez r, orduan ez m edo t
m. t eta r, orduan m

5. Formaliza itzazu proposizio hauek (kontuz parentesiekin!):
a. Hotzik egiten ez badu, ez da izoztuko lakua.
b. Gerra ezin azal daiteke oso-osorik kausa bakar batengatik.
d. Ariketa hori ez dago zuzen.
e. Ez da gertatzen Bilbora etortzea eta diru zorroa ahaztea.
f. Ez zoaz Baionara edo Bilbora.
g. Donostiatik bazatoz eta etxea uzten baduzu, orduan edo bizitoki bat erosiko duzu hemen edo hotel batera joango zara edo apartamentu bat alokatuko duzu.
h. Ez da egia Bilbotik zatozela edo etxea utziko duzula, eta ez da egia hemen baserri bat erosiko duzula ere.
i. Lege hau onartuko dute saio honetan, baldin eta soilik baldin gehiengoak onesten badu.
j. Ez dira batera gertatzen osteguna izatea eta zu lanera joatea.
k. Astelehenean gertatu ez bazen, orduan gaur ez da osteguna.
l. Substantzia organiko bat usteltzen bada, orduan haren osagaiak ongarri bihurtzen dira eta beraz lurra ongarriztatzen dute.
m. Inguruko tenperatura 0°-tik azpikoa bada, egoera solidora pasatzen da ura.
n. Ilargia Lurraren satelite bat bada, eta Lurra eguzki sistemako planeta bat baldin bada, orduan ez da gertatzen Ilargia Lurraren satelite bat ez izatea edo Lurra eguzki sistemako planeta bat ez izatea.
o. Ariketa hauek ez dira errazak niretzat, eta tentuz aztertu behar izaten ditut.
p. Gernika ez dago Bilbotik Mungia bezain hurbil.
q. Ez da gertatzen, katu beltz bat ikusiz gero, zorte txarra izatea.
r. Ez da egia etxean zegoela edo klasean zegoela, eta bada egia liburutegian zegoela.
s. Janaria erostera noa edo prestatuko dut, eta ez dut atsedenik hartzen ezta irakurtzen ere.
t. Lan egiten badut eta nekatzen banaiz, atsedenaldi bat hartuko dut.

6. Non ipini behar ditugu parentesiak, proposizio hauek konjuntzioak izateko?
• $p \vee t \wedge r$ • $p \wedge t \vee r$ • $r \vee t \wedge p$ • $t \vee p \wedge q$ • $t \wedge p \vee r$
…eta disjuntzioak izateko?

7. Non ipini behar ditugu parentesiak, proposizio hauek…
a. … baldintzakoak izateko? • $p \rightarrow -m \vee r$ • $m \wedge s \rightarrow t \wedge -s$ • $m \wedge -t \rightarrow t \vee s$ • $t \rightarrow r \wedge -r$ • $s \vee -m \rightarrow -t$
b. … baldintzabikoak izateko? • $m \vee -t \leftrightarrow p \wedge r$ • $k \rightarrow s \leftrightarrow -m \vee -r$ • $r \wedge s \leftrightarrow -p \vee t$ • $p \wedge -t \leftrightarrow m \vee -r$ • $m \rightarrow -a \leftrightarrow r \rightarrow -m$

8. Zer motatako forma daukate perpaus hauek?
• $(p \wedge t) \rightarrow r$ • $(p \vee r) \leftrightarrow (p \vee s)$ • $(p \wedge t) \wedge (s \wedge r)$ • $[(p \wedge -t) \wedge (s \wedge r)] \rightarrow r$ • $p \wedge [(-s \wedge r) \leftrightarrow -r]$ • $-[(-p \rightarrow s) \wedge r]$ • $[(t \rightarrow s) \wedge r] \vee p$ • $(p \wedge -m) \rightarrow -(s \vee p)$

3.2.4. Egia-balioak eta egia-taulak

Proposizio guztiak egiazkoak edo faltsuak izan daitezke. Hortaz, proposizio bakun guztiek egia balio bi ditu: “egiazkoa” eta “faltsua”. Honela adierazten da:

p	p
E	1
F	0

“E”-k eta “1”-ek egiazko balioa adierazten dute. “F”-k eta “0”-k, berriz, proposizioa faltsua dela.

Proposizio molekularren kasuan, barruan dituzten proposizio guztien egia balioak hartzen dira kontuan; horrela, bi perpausekin, lau (22) dira egia balioen konbinazioak:

p	q
1	1
0	1
1	0
0	0

Proposizio molekularra hiru proposizio bakunek osatzen badute, egia balioen zortzi (23) konbinazio izango dira.

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Jakiteko zenbat konbinazio dauzkan perpaus konposatu batek, formula bat dago: proposizio bakunen kopurua n bada, proposizio molekular bakoitzaren egia balioen konbinazioen kopurua 2n da.

p	q	….	n
1	1	1	1
1	1	1	0
…	…	..	..
…	…	..	..
…	…	..	..
0	0	0	0

3.3. KONEKTATZAILEEN EGIA TAULAK

- **Ukapena:** konektatzaile honek, proposizio bat egiazkoa bada, faltsu bihurtzen du, eta alderantziz: faltsua bada, egiazko bihurtzen du. Honela sinbolizatzen da:

<table>
<tr><td>p</td><td>-p</td><td rowspan="3">(p faltsua bada, -p egiazkoa da; eta p egiazkoa izanez gero, -p faltsua da)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>

- **Konjuntzioa:** Konjuntzio bat egia izateko, ezinbestekoa da barruko proposizio edo perpaus guztiak egiazkoak izatea; faltsua izango da, aldiz, gainerako beste kasu guztietan.

  Konjuntzioari dagokion egia-taula hau da:

p	q	p ^ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- **Disjuntzioa:** Disjuntzio bat egia izateko, barruko proposizio bakun guztietatik gutxienez batek izan behar du egiazkoa; disjuntzio bat, berriz, barruko proposizio guztiak faltsuak badira bakarrik izango da faltsua.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- **Baldintza:** Baldintza bat kasu guztietan da egiazkoa, batean izan ezik: aurrekaria egiazkoa eta atzekaria faltsua direnean; honela:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- **Baldintzabikoa:** Baldintzabiko bat egia izateko, aurrekariak eta atzekariak egia balio berbera (biak egiazkoak edo biak faltsuak) eduki behar dute.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

3.4. PROPOSIZIO MOLEKULARREN EGIA TAULA NOLA OSATU. ADIBIDE BAT.

Eman dezagun hiru proposizio bakunez osatutako proposizio hau daukagula:

$$\boxed{(p \wedge q) \vee r}$$

Eraiki dezagun haren egia taula (hiru proposizio bakun direnez, $8 = 2^3$ konbinazio).

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \vee r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

- Ariketak

1. Sinbolizatu proposizio hauek, eta eraiki bakoitzaren egia-taula:
• Ez da egia hona etortzen naizenean aspertu egiten naizela.
• Lantegiek kea botatzen dutenean, ezin dut arnasa hartu eta nekatu egiten naiz.
• Eguzkia egiten duenean eta hondartzara hurbiltzen garenean, igeri egiten dut.
• Etorri, ikusi eta irabazi zuen.
• Oporretan nagoenean ez dut kirolik egiten, baina asko irakurtzen dut.
• Bilbora joanez gero, erosketa asko egin ditu baina diru gutxi gastatu.
• Berba egiten ez dudanean, urduri eta goibel ipintzen da.

1. Sinbolizatu proposizio hauek, eta eraiki bakoitzaren egia-taula:
• Kirol egitean alkohola edaten baduzu, gaixotu egingo zara.
• Ez da egia kantatzen dugunean euria egiten duela.
• Abesten dugunean ez du euririk egiten.
• Ez badugu abesten, euria eta hotza egingo du.
• Bizikleta apurtzen badidazu, ostikada bat emango dizut.

• Lan hau amaitzen baduzu eta ondo badago, oporrak edukiko dituzu.
• Ez baduzu korrika egiten, ez duzu autobusa hartuko eta berandu ailegatuko zara eskolara.

2. Eraiki ezazu proposizio hauen egia-taula:
• $p \leftrightarrow (r \wedge s)$
• $(p \vee r) \rightarrow -s$
• $p \rightarrow (r \vee -s)$
• $(p \wedge r) \vee (-s \wedge t)$
• $(p \vee r) \rightarrow -(p \vee r)$
• $-p \vee (s \rightarrow r)$
• $(-p \rightarrow -s) \wedge (p \rightarrow r)$
• $-p \leftrightarrow (r \vee -s)$

3.5. TAUTOLOGIAK, KONTSISTENTZIAK ETA KONTRAESANAK

Proposizio molekular baten egia balioen emaitzei erreparatzen badiegu, hiru kasu bereiz ditzakegu:

1. Egia balio batzuk faltsuak eta beste batzuk egiazkoak izatea suerta daiteke; hori gertatzen denean, esaten da proposizio molekularra **proposizio kontsistentea** dela.

Adibidez: $p \rightarrow (q \vee r)$

p	→	(q	∨	r)
1	**1**	1	1	1
1	**1**	1	1	0
1	**1**	0	1	1
1	**0**	0	0	0
0	**1**	1	1	1
0	**1**	1	1	0
0	**1**	0	1	1
0	**1**	0	1	1

2. Konbinazioen emaitza guzti-guztiak faltsuak izatea suerta daiteke. Hori gertatzen denean, esaten dugu proposizio molekularra **kontraesana** dela, egiazko kasurik ez dagoelako.

Adibidez: p ^ (-p ^ r)

p	^	(-p	^	r)
1	**0**	0	0	1
1	**0**	0	0	0
0	**0**	1	1	1
0	**0**	1	0	0

3. Konbinazio guzti-guztiak egiazkoak direnean, esaten da proposizio molekularra **tautologia** dela.

Adibidez: [(p → s) ^ (s → r)] → (p → r)

[(p	→	s)	^	(s	→	r)]	→	(p	→	r)
1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	**1**	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	**1**	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	**1**	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	**1**	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	**1**	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	**1**	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0

- Ariketak

1. Eraiki proposizio hauen egia-taulak, eta esan proposizio kontsistenteak, kontraesanak ala tautologiak ote diren:
• p → (r ^ s)
• (p ∨ s) ↔ r
• (p ^ m) ∨ (-r ^ s)
• p → -(-p ^ r)
• p → (-r ^ r)

• $-[(p \wedge s) \vee r] \leftrightarrow -r$
• $p \wedge [(s \vee r) \leftrightarrow -r]$
• $-[(m \rightarrow s) \wedge r]$
• $[(m \rightarrow s) \wedge r] \vee p$
• $(p \wedge r) \rightarrow -(s \vee p)$
• $-[p \rightarrow (r \wedge s)] \vee -(m \wedge -p)$
• $(p \wedge r) \rightarrow (s \vee p)$
• $[p \rightarrow -(r \wedge s)] \vee -(m \wedge -p)$

1. Esan ea proposizio hauek egiazkoak ala faltsuak diren, hurrengo datuok jakinda: m egiazkoa dela, p faltsua, r egiazkoa, eta s faltsua.
• $p \wedge [(s \vee m) \leftrightarrow -r]$
• $-[(s \rightarrow m) \wedge r]$
• $[(m \rightarrow s) \wedge r] \vee -p$
• $(p \wedge m) \rightarrow -(s \vee p)$
• $-[p \rightarrow (r \wedge s)] \vee -(m \wedge -p)$
• $[(m \rightarrow s) \wedge r] \vee p$
2. Esan ea proposizio hauek egiazkoak ala faltsuak diren, hurrengo datuok jakinda: m egiazkoa dela, p faltsua, r egiazkoa, eta s faltsua.
• $(p \wedge m) \rightarrow (s \vee p)$
• $[p \rightarrow (r \wedge s)] \vee -(m \wedge -p)$
• $(m \wedge -p) \leftrightarrow -(r \wedge s)$

Proposizioen logikaren dedukzioak 4

4.1. SARRERA

Gizaki guztiok, gure bizitzan zehar, egunero arrazoitzen dugu, gai gara argudiatzeko, gure ekintzak, gure aukerak, gure sinesmenak… justifikatzen ditugu besteen aurrean onartuak izan daitezen (adibidez, maiz justifikatzen dugu hartu dugun bidea, zergatik aukeratu dugun gauza bat eta ez beste bat, zer iritzi daukagun…). Askotan, dauzkagun informazioetatik, edo jakinarazi dizkiguten berrietatik, edo gure eskarmentutik, ondorioak ateratzen ditugu. Abokatuek, zientzialariek, politikoek… denok egiten dugu. Azken finean, denok jotzen dugu argudioetara besteek gu ulertzeko. Dena dela, argudio guztiak ez dira baliagarriak izaten, eta argudiatzeak bere arauak ditu. Hemendik aurrera, bada, saiatuko gara arau horiek aztertzen.

Gorago ikusi dugun bezala, momentuz, edozein adierazpen proposizio sinboliza dezakegu, eta egia taulak ere, badakigu egiten. Hemendik aurrera, saiatuko gara azaltzen inferentzia logikoa zer den eta zer motatako arauak erabiltzen ditugun. Horretarako, argi eduki behar ditugu kontzeptu hauek:

1. DEDUKZIOA: Deduzitzea da dauzkagun datuetatik beste datu batzuk ateratzea.
2. PREMISAK: premisa hitzak, etimologikoki, “aurretik bidaltzen dena” esan nahi du; beraz, aurrez ematen dizkiguten datuak dira premisak, eta egiatzat hartu behar ditugunak. Proposizio modukoak dira, eta haien gainean aplikatu behar dira inferentzia arauak, ondorioak zuzen ateratzeko.
3. ONDORIOAK: premisatik ateratako proposizioak dira. Ondorio hauek ateratzeko, inferentzia arauak erabili behar ditugu. Gero, behar izanez gero, ateratako ondoriook ere premisa bihur daitezke.
4. INFERENTZIA ARAUAK: Inferentzia arauak, dauzkagun premisen gainean aplikatzen ditugun arauak dira, ondorio batzuk ateratzeko. Arau hauek oso sinpleak izan arren, ondo aplikatu behar ditugu.

4.1.1 Inferentzia logikoa eta haren erregelak

Hemendik aurrera, inferentzia erregelei helduko diegu. Horretarako, prozedura hau erabiliko dugu:

1. Lehenengo eta behin, arau bakoitzaren definizioa emango dugu.
2. Arauaren adibideak ipiniko ditugu.
3. Amaitzeko, araua lantzeko ariketak proposatuko ditugu. Ariketetan, aurrez azaldutako arau edo erregelak guztiak nahastuko ditugu (amaieran, ariketen emaitzak ere agertuko dira).

4.2. “MODUS PONENDO PONENS” ERREGELA (P. P.)

$\dfrac{P \rightarrow Q \quad P}{Q}$	(baieztatuz baieztatzen duen modua) Baldintzazko premisa bat eta, beste premisetan, baldintzazko premisa horren aurrekaria dauzkagu. Orduan, baldintzazkoaren atzekaria atera dezakegu konklusiotzat.

Erregela honek forma desberdinak har ditzake; dena dela, beti agertu behar da baldintza bat premisa batean, eta haren aurrekaria (baldintzan agertzen den modu berean) beste premisa batean, atzekaria (baldintzan agertzen den modu berean) ateratzeko. Beraz, bai aurrekaria bai atzekaria nahi bezain konplexuak izan daitezke.

- Hizkuntza arrunteko adibideak

1) Lehiarik ez badago, monopolioa agertu ohi da. 2) Ez dago lehiarik. ——————————— 3) (Beraz,) Monopolioa agertzen da.	1) $-p \rightarrow r$ 2) $-p$ ——————————— 3) r (P. P. 1, 2)
1) Euria eta hotza egiten badu, orduan busti egiten naiz, baita katarroa hartu ere. 2) Euria eta hotza egiten du. ——————————— 3) (Beraz,) Busti eta katarroa harrapatuko dut.	1) $(p \wedge r) \rightarrow (t \wedge s)$ 2) $(p \wedge r)$ ——————————— 3) $(t \wedge s)$ (P. P. 1, 2)

- *Modus ponendo ponens* erregela, adibideak

1. ad.: 1) $(m \wedge r) \rightarrow (s \wedge t)$ 2) $(m \wedge r)$ ——————————— 3) $(s \wedge t)$ (P. P. 1, 2)	2. ad.: 1) $(p \wedge -t) \rightarrow r$ 2) $(p \wedge -t)$ ——————————— 3) r (P. P. 1, 2)

3. ad.: 1) $-r$ 2) $-r \rightarrow -s$ ——————————— 3) $-s$ (P. P. 1, 2)	4. ad.: 1) $t \rightarrow -r$ 2) t ——————————— 3) $-r$ (P. P. 1, 2)

5. ad.:	6. ad.:
1) $-p \rightarrow m$ 2) $-p$ ——— 3) m (P. P. 1, 2)	1) $t \rightarrow r$ 2) t ——— 3) r (P. P. 1, 2)
7. ad.:	**8. ad.:**
1) $s \rightarrow -(p \vee t)$ 2) s ——— 3) $-(p \vee t)$ (P. P. 1, 2)	1) $-(p \vee r)$ 2) $-(p \vee r) \rightarrow s$ ——— 3) s (P. P. 1, 2)

Jakin behar dugu edozein inferentzia erregela (biltzen dituen premisekin eta ondorioarekin osatutako baldintza) **tautologia** bat dela, hau da, erregela biltzen duen proposizio hori egia izango dela kasu guztietan.

1) $p \rightarrow q$

2) p

———

3) q

Modu ponendo ponens arauan agertzen diren bi premisekin eta ondorioarekin baldintza bat eraikitzen badugu:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

gelditzen zaigun proposizio hori tautologia da.

Frogatzeko, egin dezagun haren egia-taula:

[(p	→	q)	^	p]	→	q
1	1	1	1	1	**1**	1
0	1	1	0	0	**1**	1
1	0	0	0	1	**1**	0
0	1	0	0	0	**1**	0

Ikusten dugunez, emandako proposizioaren egia taulako balioak, kasu guztietan, egiazkoak dira. Horrelako proposizioak (kasu guztietan egiazkoak direnak) tautologiak direla esaten da, arestian esan genuenez.

4.2.1. Nola aplikatzen dira arauak edo erregelak bi baino premisa gehiagorekin

1. Erregelak premisetan bakarrik aplika daitezke.
2. Premisetan erregela bat aplikatu eta gero ondorio bat ateratzen badugu, dedukzioa horrentantxe amai daiteke, edo ondorioa premisa bihur daiteke, beste dedukzio batzuk egiteko (beste ondorio batzuk ateratzeko).

- Arauak edo erregelak bi baino premisa gehiagorekin aplikatzeko adibideak

1. ad.:		2. ad.:	
1) p → (-t → s)		1) (-m → s)	
2) p		2) (r → -m)	
3) -t		3) r	
4) (s → x)		4) (s → t)	
5) (-t → s)	(P. P. 1, 2)	5) -m	(P. P. 2, 3)
6) s	(P. P. 3, 5)	6) s	(P. P. 1, 5)
7) x	(P. P. 4, 6)	7) t	(P. P. 4, 6)

- Ariketak

Aplikatu *modus ponendo ponens* erregela eskatzen dugun ondorioa ateratzeko.

1. ariketa. D: (r ^ -z)	2. ariketa. D: -z
1) -s → m	1) -p
2) (a ^ b) → t	2) -q
3) m → (a ^ b)	3) -r
4) t → (r ^ -z)	4) -p → -t
5) -s	5) -q → -m
	6) -r → -s
	7) -m → -z

3. ariketa. D: z 1) $-(a \wedge b) \rightarrow -k$ 2) $-(a \wedge b)$ 3) $-x \rightarrow -s$ 4) $-k \rightarrow -x$ 5) $-s \rightarrow$	4. ariketa. D: $-(m \wedge b)$ 1) $t \rightarrow -(-s \vee -r)$ 2) t 3) $-(-s \vee -r) \rightarrow -(x \wedge t)$ 4) $-(x \wedge t) \rightarrow -(m \wedge b)$
5. ariketa. D: $-m$ 2) $(-r \vee -k)$ 3) $(-r \vee -k) \rightarrow -t$ 4) $-t \rightarrow (s \rightarrow -m)$ 5) s	6. ariketa. D: $(a \vee b)$ 1) $-m \rightarrow -z$ 2) r 3) $t \rightarrow (a \vee b)$ 4) $-z \rightarrow (r \rightarrow t)$ 5) $-m$
7. ariketa. D: k 1) $p \rightarrow -m$ 2) $-m \rightarrow -(a \wedge -b)$ 3) $-(a \wedge -b) \rightarrow k$ 4) p	8. ariketa. D: $(r \vee x)$ 2) $-p$ 3) $-m$ 4) $-p \rightarrow [-m \rightarrow (r \vee x)]$ 5) s
9. ariketa. D: z 1) $-p \rightarrow s$ 2) $m \rightarrow [(-p \rightarrow s) \rightarrow x]$ 3) $x \rightarrow z$ 4) m	10. ariketa. D: s 1) $t \rightarrow [-(a \wedge -m) \rightarrow s]$ 2) $-(a \wedge -m)$ 3) t
11. ariketa. D: $m \leftrightarrow -b$ 1) $(p \leftrightarrow -t) \rightarrow s$ 2) $s \rightarrow (m \leftrightarrow -b)$ 3) $p \leftrightarrow -t$	12. ariketa. D: $-p \rightarrow -m$ 1) $-k \rightarrow (-r \rightarrow -s)$ 2) $(-r \rightarrow -s) \rightarrow -t$ 3) $-t \rightarrow (-p \rightarrow -m)$ 4) $-k$

- Ariketen erantzunak

1. ariketa: 6) m (P. P. 1, 5) 7) $(a \wedge b)$ (P. P. 3, 6) 8) t (P. P. 2, 7) 9) $(r \wedge -z)$ (P. P. 4, 8)	2. ariketa: 8) -m (P. P. 2, 5) 9) -z (P. P. 7, 8)
3. ariketa: 6) -k (P. P. 1, 4) 7) -x (P. P. 3, 6) 8) -s (P. P. 2, 7) 9) z (P. P. 5, 8)	4. ariketa: 5) $-(-s \vee -r)$ (P. P. 1, 2) 6) $-(x \wedge t)$ (P. P. 3, 5) 7) $-(m \wedge b)$ (P. P. 4, 6)
5. ariketa: 5) -t (P. P. 1, 2) 6) $s \rightarrow -m$ (P. P. 3, 5) 7) -m (P. P. 4, 6)	6. ariketa: 6) -z (P. P. 1, 5) 7) $r \rightarrow t$ (P. P. 4, 6) 8) s (P. P. 2, 7) 9) $(a \vee b)$ (P. P. 3, 8)
7. ariketa: 5) -m (P. P. 1, 4) 6) $-(a \wedge -b)$ (P. P. 2, 5) 7) k (P. P. 3, 6)	8. ariketa: 4) $q \rightarrow (r \vee x)$ (P. P. 1, 3) 5) $(r \vee x)$ (P. P. 2, 4)
9. ariketa: 5) $(-p \rightarrow s) \rightarrow x$ (P. P. 2, 4) 6) x (P. P. 1, 5) 7) z (P. P. 3, 6)	10. ariketa: 4) $[-(a \wedge -m) \rightarrow s]$ (P. P. 1, 3) 5) s (P. P. 2, 4)
11. ariketa: 4) s (P. P. 1, 3) 5) $m \leftrightarrow -b$ (P. P. 2, 4)	12. ariketa: 5) $-r \rightarrow -s$ (P. P. 1, 4) 6) -t (P. P. 2, 5) 7) $-p \rightarrow -m$ (P. P. 3, 6)

4.3. UKAPEN BIKOITZAREN ERREGELA (U. B.)

P ——— $\neg\neg P$	$\neg\neg P$ ——— P

Erregela honek dio bi ukapen baieztapen bat bezalakoak direla. Arau hau inkontzienteki aplikatzen dugunez, ez dugu ariketarik egingo.

- Hizkuntza arrunteko adibideak

1) Ez da egia Lorea ez dela ikaslea.	1) -(-p)
———	———
2) Lorea ikaslea da.	2) p

4.4. «MODUS TOLLENDO TOLLENS» ERREGELA (T. T.)

$P \rightarrow Q$ -Q ——— -P	(ezeztatuz ezeztatzen duen modua) Erregela honen arabera, baldintzazko premisa baten atzekaria ezeztatuz gero, orduan aurrekariaren ezeztatzea ateratzen da konklusiotzat.

Erregela honek forma desberdinak har ditzake; dena dela, beti agertu behar da baldintza bat premisa batean, eta haren atzekaria ukatuta beste premisa batean, aurrekaria ukatuta ateratzeko. Beraz, bai aurrekaria bai atzekaria nahi bezain konplexuak izan daitezke.

- Hizkuntza arrunteko adibideak

1. Mendira joaten naizenetan, botak eta makila eramaten ditut.	1. $p \rightarrow (r \wedge s)$
2. Ez daramatzat ez botak ezta makila ere.	2. $-(r \wedge s)$
———	———
3. (Beraz,) Orain ez noa mendira.	3. -p (T. T. 1, 2)

1. Euria egiten duen guztietan, euritakoa eramaten dut.	1. $p \rightarrow r$
2. Orain ez daramat euritakoa.	2. $-r$
3. (Beraz,) Orain ez du euririk egiten.	3. $-p$ (T. T. 1, 2)

- Adibideak

1. ad.: 1) $-t$ 2) $(p \wedge m) \rightarrow t$ ——— 3) $-(p \wedge m)$ (T. T. 1, 2)	2. ad.: 1) $-(r \vee p) \rightarrow t$ 2) $-t$ ——— 3) $(r \vee p)$ (T. T. 1, 2)
3. ad.: 1) $(m \wedge -r) \rightarrow t$ 2) $-t$ ——— 3) $-(m \wedge -r)$ (T. T. 1, 2)	4. ad.: 1) $-p \rightarrow t$ 2) $-t$ ——— 3) p (T. T. 1, 2)
5. ad.: 1) $m \rightarrow -z$ 2) $-z$ ——— 3) $-m$ (T. T. 1, 2)	6. ad.: 1) $p \rightarrow (r \vee s)$ 2) $-(r \vee s)$ ——— 3) $-p$ (T. T. 1, 2)

Modus ponendo ponens erregela deskribatzean esan genuen bezala, edozein inferentzia erregela (biltzen dituen premisekin eta ondorioarekin osatutako baldintza) tautologia bat da, hau da, proposizio hori egia izango da kasu guztietan.

Modus tollendo tollens erregelari aplikatuta:

1) $p \rightarrow q$
2) $-q$

———

3) $-p$

$$[(p \rightarrow q) \wedge -q] \rightarrow -p$$

Gelditzen zaigun proposizio hori tautologia da. Frogatzeko, egin dezagun haren egia-taula:

[(p	→	q)	^	-q	→	-p
1	1	1	0	0	**1**	0
0	1	1	0	0	**1**	1
1	0	0	0	1	**1**	0
0	1	0	1	1	**1**	1

Erregela guztiekin gertatzen den bezala, erregela hau bi baino premisa gehiagorekin aplikatzen badugu, aterako dugun proposizioa azken ondorioa izango da, edo beste premisa bat izango balitz bezala erabil daiteke areagoko ondorio batzuk ateratzeko.

- Ariketak

1. ariketa. D: x 1) -p → z 2) -(-x → t) → -p 3) -z 4) -t	2. ariketa. D: -r 1) (p ^ -t) → m 2) r → (p ^ -t) 3) -m
3. ariketa. D: -m 1) -(m → -z) → t 2) z 3) -t	4. ariketa. D: -s 1) p → -(r ^ s) 2) (r ^ s) 3) s → p

- Ariketen erantzunak

1. ariketa: 5) p (T. T. 1, 3) 6) (-x → t) (T. T. 2, 5) 7) x (T. T. 4, 6)	2. ariketa: 4) -(p ∧ -t) (T. T. 1, 3) 5) - r (T. T. 2, 4)
3. ariketa: 4) (m → -z) (T. T. 1, 3) 5) -m (T. T. 2, 4)	4. ariketa: 4) -p (T. T. 1, 2) 5) -s (T. T. 3, 4)

- *Modus ponendo ponens* eta *Modus tollendo tollens* erregela biak nahastuta egin beharreko ariketak

1. ariketa. D: -z	2. ariketa. D: -b
1) $(p \vee m) \to (a \vee -b)$ 2) $z \to t$ 3) $-(p \vee m) \to -t$ 4) $-(a \vee -b)$	1) $t \to -(a \wedge m)$ 2) $(p \vee -z) \to -s$ 3) $-t \to x$ 4) $-(a \wedge m) \to s$ 5) $b \to -x$ 6) $(p \vee -z)$
3. ariketa. D: -x 1) $-(z \wedge r) \to -m$ 2) p 3) $t \to m$ 4) $x \to t$ 5) $p \to -(z \wedge r)$	4. ariketa. D: -t 1) $-(p \vee z)$ 2) $(r \vee t) \to (p \vee z)$ 3) $-(r \vee t) \to (m \vee b)$ 4) $(m \vee b) \to x$ 5) $t \to -x$
5. ariketa. D: m 1) $p \to (-s \to r)$ 2) $x \to -s$ 3) p 4) $-r$ 5) $-x \to m$	6. ariketa. D: t 1) $p \to (z \to r)$ 2) $-t \to -x$ 3) $(m \to b) \to x$ 4) $-(m \to b) \to p$ 5) $-(z \to r)$

7. ariketa. D: -s	8. ariketa. D: -b
1) $-k$ 2) $s \to -m$ 3) $-(-k \to m) \to t$ 4) $-t$	1) $-m \to -z$ 2) $t \to -w$ 3) $-w \to x$ 4) $x \to -m$ 5) z 6) $-t \to -b$

9. ariketa. D: -m	10. ariketa. D: -m
1) -p	1) $-[-(p \rightarrow z) \rightarrow t] \rightarrow x$
2) $b \rightarrow x$	2) $m \rightarrow -z$
3) $x \rightarrow p$	3) -x
4) $-b \rightarrow r$	4) -t
5) $m \rightarrow -r$	5) p

11. ariketa. D : -t	12. ariketa. D: x
1) $(p \wedge -q) \rightarrow -(m \wedge s)$	1) $-z \rightarrow -m$
2) $(a \wedge b) \rightarrow (m \wedge s)$	2) $-t \rightarrow (-a \vee b)$
3) $t \rightarrow -x$	3) $s \rightarrow -(-a \vee b)$
4) $-(a \wedge b) \rightarrow x$	4) $z \rightarrow -t$
5) $(p \wedge -q)$	5) $-s \rightarrow x$
	6) m

- Ariketen emaitzak

1. ariketa:		2. ariketa:	
5) $-(p \vee m)$	(T. T. 1, 4)	7) -s	(P. P. 2, 6)
6) -t	(P .P. 3, 5)	8) $(a \wedge m)$	(T. T. 4, 7)
7) -z	(T. T. 2, 6)	9) -t	(T. T. 1, 8)
		10) x	(P. P. 3, 9)
		11) -b	(T. T. 5, 10)

3. ariketa:		4. ariketa:	
6) $-(z \wedge r)$	(P. P. 2, 5)	6) $-(r \vee t)$	(T. T. 1, 2)
7) -m	(P. P. 1, 6)	7) $(m \vee b)$	(P. P. 3, 6)
8) -t	(T. T. 3, 7)	8) x	(P. P. 4, 7)
9) -x	(T. T .4, 8)	9) -t	(T. T. 5, 8)

5. ariketa: 6) (-s → r) (P. P. 1, 3) (P .P. 1, 3) 7) s (T. T. 4, 6) 8) -x (T. T. 2, 7) 9) m (P. P. 5, 8)	6. ariketa: 6) -p (T. T. 1, 5) 7) (m → b) (T. T. 4, 6) 8) x (P. P. 3, 7) 9) t (T. T. 2, 8)
7. ariketa: 5) -k ® m (T. T. 3, 4) 6) m (P. P. 1, 5) 7) -s (T. T. 2, 6)	8. ariketa: 7) m (T. T. 1, 5) 8) -x (T. T. 4, 7) 9) w (T. T. 3, 8) 10) -t (T. T. 2, 9) 11) - b (P. P. 6, 10)
9. ariketa: 6) -x (T. T. 1, 3) 7) -b (T. T. 2, 6) 8) r (P. P. 4, 7) 9) -m (T. T. 5, 9)	10. ariketa: 6) [-(p → z) → t] (T. T. 1, 3) 7) (p → z) (T. T. 4, 6) 8) z (P. P. 5, 7) 9) -m (T. T. 2, 8)
11. ariketa: 6) -(m ^ s) (P. P. 1, 5) 7) -(a ^ b) (T. T. 2, 6) 8) x (P. P. 4, 7) 9) -t (T. T. 3, 8)	12. ariketa: 7) z (T. T. 1, 6) 8) -t (P. P. 4, 7) 9) (-a ˅ b) (P. P. 2, 8) 10) -s (T. T. 3, 9) 11) x (P. P. 5, 10)

4.5. “MODUS TOLLENDO PONENS” ERREGELA (T. P.)

Forma bi dagozkio eredu honi:

P ˅ Q -P ——— Q	P ˅ Q -Q ——— P

Erregela honek, beti bezala, forma desberdinak har ditzake; dena dela, beti agertu behar da disjuntzio bat premisa batean, eta disjuntzio horren proposizio bat ukatuta beste premisa batean, ukatuta ez dagoen proposizioa ateratzeko konklusiotzat. Beraz, bai disjuntzioa bera bai disjuntzioaren ukatutako proposizioa nahi bezain konplexuak izan daitezke.

- Hizkuntza arrunteko adibideak

1) Mendira edo hondartzara joango naiz.	1) $p \vee r$
2) Ez naiz joango mendira.	2) $-p$
______________________	__________
3) (Beraz,) Hondartzara joango naiz.	3) r (T. P. 1, 2)
1) Gaur gauean afaltzera edo zinemara joango gara.	1) $p \vee r$
2) Ez gara joango zinemara.	2) $–r$
______________________	__________
3) (Beraz,) Afaltzera joango gara.	3) p (T. P. 1, 2)

- Adibideak

1. ad.: 1) $t \vee -z$ 2) z __________ 3) t (T. P. 1, 2)	2. ad.: 1) $(p \leftrightarrow m) \vee (r \leftrightarrow x)$ 2) $-(p \leftrightarrow m)$ __________ 3) $-(r \leftrightarrow x)$ (T. P. 1, 2)
3. ad.: 1) $-t \vee -(z \wedge s)$ 2) t __________ 3) $-(z \wedge s)$ (T. P. 1, 2)	4. ad.: 1) $(a \wedge -m) \vee s$ 2) $-s$ __________ 3) $(a \wedge -m)$ (T. P. 1, 2)
5. ad.: 1) $-p \vee (z \wedge r)$ 2) $-(z \wedge r)$ __________ 3) $-p$ (T. P. 1, 2)	6. ad.: 1) $p \vee t$ 2) $-p$ __________ 3) t (T. P. 1, 2)
7. ad.: 1) $[(-t \wedge z) \rightarrow -m] \vee x$ 2) $-x$ __________ 3) $[(-t \wedge z) \rightarrow -m]$ (T. P. 1, 2)	8. ad.: 1) $-p \vee -m$ 2) p __________ 3) $-m$ (T. P. 1, 2)

Aurrekoetan egin dugun bezala, ikus dezagun modus tollendo ponens inferentzia erregela ere tautologia bat dela, hau da, proposizio hori egia izango dela kasu guztietan.

1) $p \vee q$
2) $-p$
3) q

Modus tollendo ponens arauan agertzen diren bi premisekin eta ondorioarekin baldintza bat eraikitzen badugu:

$$[(p \vee q) \wedge -p] \rightarrow q$$

gelditzen zaigun proposizioa tautologia da, esan bezala. Frogatzeko, egin dezagun haren egiataula:

[(p	$\vee$	q)	$\wedge$	- p]	$\rightarrow$	q
1	1	1	0	0	**1**	1
0	1	1	1	1	**1**	1
1	1	0	0	0	**1**	0
0	0	0	0	1	**1**	0

Ikusten dugunez, emandako proposizioaren egia taularen balioak, kasu guztietan, egiazkoak dira. Horrelako proposizioak (kasu guztietan egiazkoak direnak) tautologiak direla esaten da, arestian esan genuenez.

- Ariketak

1. ariketa. D: -m	2. ariketa. D: -m
1) $-a \vee t$	1) $-a \vee -t$
2) $-x \vee -d$	2) $-(p \wedge z) \vee -m$
3) $a \vee x$	3) t
4) $-t$	4) $a \vee (x \wedge d)$
5) $d \vee -m$	5) $-(x \wedge d) \vee (p \wedge z)$

3. ariketa. D: (x ^ -b)	4. ariketa. D: m
1) (m → z) ˅ -(m → r)	1) x ˅ m
2) (m → r) ˅ -s	2) -r ˅ -x
3) s ˅ -t	3) t
4) -(m → z)	4) -p ˅ r
5) t ˅ (x ^ -b)	5) p ˅ -t
5. ariketa. D: -(a ^ -t)	**6. ariketa. D: -t**
1) (p → z) ˅ -m	1) (-m ˅ z) ˅ x
2) m	2) m
3) -s ˅ -(p → z)	3) -x
4) s ˅ -(a ^ -t)	4) -z ˅ -t

- Ariketen erantzunak

1. ariketa:		2. ariketa:	
6) -a	(T. P. 1, 4)	6) -a	(T. P. 1, 3)
7) x	(T. P. 3, 6)	7) (x ^ d)	(T. P. 4, 6)
8) -d	(T. P. 2, 7)	8) (p ^ z)	(T. P. 5, 7)
9) -m	(T. P. 5, 8)	9) -m	(T. P. 2, 8)
3. ariketa:		4. ariketa:	
6) -(m → r)	(T. P. 1, 4)	6) p	(T. P. 3, 5)
7) -s	(T. P. 2, 6)	7) r	(T. P. 4, 6)
8) -t	(T. P. 3, 7)	8) -x	(T. P. 2, 7)
9) (x ^ -b)	(T. P. 5, 8)	9) m	(T. P. 1, 8)
5. ariketa:		6. ariketa:	
5) (p → z)	(T. P. 1, 2)	5) (-m ˅ z)	(T. P. 1, 3)
6) -s	(T. P. 3, 5)	6) z	(T. P. 2, 5)
7) -(a ^ -t)	(T. P. 4, 6)	7) -t	(T. P. 4, 6)

- P. P., T. T. eta T. P. erregelak nahastuta egin beharreko ariketak

1. ariketa. D: t 1) $m \rightarrow (x \vee t)$ 2) $-x$ 3) $-m \rightarrow -s$ 4) s	2. ariketa. D: $-t$ 1) $(a \vee -m)$ 2) $x \rightarrow -(a \vee -m)$ 3) $d \rightarrow p$ 4) $-p \vee -t$ 5) $x \vee d$
3. ariketa. D: $(a \vee -t)$ 1) $-s \rightarrow -z$ 2) $x \rightarrow (a \vee -t)$ 3) $s \rightarrow x$ 4) $-m$ 5) $m \vee z$	4. ariketa. D: $-x$ 1) $-m \wedge z$ 2) $-r$ 3) $-p \rightarrow t$ 4) $(-m \wedge z) \rightarrow (r \vee -p)$ 5) $x \rightarrow -t$
5. ariketa. D: $-(-m \wedge b)$ 1) $-(p \vee z) \rightarrow s$ 2) $(-m \wedge b) \rightarrow -x$ 3) $z \rightarrow x$ 4) $-s$ 5) $-p$	6. ariketa. D: $-a$ 1) $-z \rightarrow t$ 2) $-p \rightarrow m$ 3) $-(a \rightarrow x) \rightarrow -t$ 4) $-m$ 5) $-p \vee -z$ 6) $-x$
7. ariketa. D: t 1) $-(-m \vee b) \rightarrow x$ 2) m 3) $-x$ 4) $b \rightarrow t$	8. ariketa. D: $(x \wedge d)$ 1) $(p \vee -t) \vee (-z \vee s)$ 2) $(p \vee -t) \rightarrow m$ 3) $-(x \wedge d) \rightarrow -m$ 4) $-(-z \vee s)$
9. ariketa. D: $-m$ 1) $[-(a \rightarrow b) \rightarrow x] \vee t$ 2) $-x$ 3) $-b$ 4) $-t$ 5) $a \vee -m$	10. ariketa. D: $-m$ 1) $-z$ 2) $-x$ 3) $t \vee r$ 4) $p \rightarrow (r \rightarrow x)$ 5) $t \rightarrow -m$ 6) $p \vee z$

11. ariketa. D: m	12. ariketa. D: -s
1) -m → r	1) -m → -p
2) k → -r	2) -(a ^ -b) ∨ r
3) -x	3) -r
4) x ∨ k	4) -p → (a ^ -b)
	5) m → -s

- Ariketen emaitzak

1. ariketa:		2. ariketa:	
5) m	(T. T. 3, 4)	6) -x	(T. T. 1, 2)
6) (x ∨ t)	(P. P. 1, 5)	7) d	(T. P. 5, 6)
7) t	(T. P. 2, 6)	8) p	(P. P. 3, 7)
		9) -t	(T. P. 4, 8)
3. ariketa:		**4. ariketa:**	
6) z	(T. P. 4, 5)	6) (r ∨ -p)	(P. P. 1,4)
7) s	(T. T. 1, 6)	7) -p	(T. P. 2, 6)
8) x	(P. P. 3, 7)	8) t	(P. P. 3, 7)
9) (a ∨ -t)	(P. P. 2, 8)	9) -x	(T. T. 5, 8)
5. ariketa:		**6. ariketa:**	
6) (p ∨ z)	(T. T. 1, 4)	7) p	(T. T. 2, 4)
7) z	(T. P. 5, 6)	8) -z	(T. P. 5, 7)
8) x	(P. P. 3, 7)	9) t	(P. P. 1, 8)
9) -(-m ^ b)	(T. T. 2, 8)	11) (a → x)	(T. T. 3, 9)
		12) -a	(T. T. 6, 11)
7. ariketa:		**8. ariketa:**	
5) (-m ∨ b)	(T. T. 1, 3)	5) (p ∨ -t)	(T. P. 1, 4)
6) b	(T. P. 2, 5)	6) m	(P. P. 2, 5)
7) t	(P. P. 4, 6)	7) (x ^ d)	(T. T. 3, 6)
9. ariketa:		**10. ariketa:**	
6) [-(a → b) → x]	T. P. 1,4)	7) p	(T. P. 1, 6)
7) (a → b)	(T. T. 2, 6)	8) (r → x)	(P. P. 4, 7)
8) -a	(T. T. 3, 7)	9) -r	(T. T. 2, 8)
9) -m	(T. P. 5, 8)	10) t	(T. P. 3, 9)
		11) -m	(P. P. 5, 10)

11. ariketa:		12. ariketa:	
5) k	(T. P. 3, 4)	6) $-(a \wedge -b)$	(T. P. 2, 3)
6) -r	(P. P. 2, 5)	7) p	(T. T. 4, 6)
7) m	(T. T. 1, 6)	8) m	(T. T. 1, 6)
		9) -s	(P. P. 5, 8)

4.6. "SILOGISMO DISJUNTIBOA" ERREGELA (S. D.)

1) $P \vee Q$

2) $P \rightarrow R$

3) $Q \rightarrow S$

---

4) $R \vee S$

Erregela honek hau dio: disjuntzio bat badaukagu, eta bi baldintza non baldintzen aurrekariak disjuntzioaren proposizioak diren, baldintzen atzekarien disjuntzio bat atera dezakegu konklusiotzat.

- Hizkuntza arrunteko adibideak

1) Hondartzara edo mendira joango naiz.	1) $p \vee r$
2) Hondartzara banoa, bainu jantzia eramango dut.	2) $p \rightarrow s$
3) Mendira banoa, botak eramango ditut.	3) $r \rightarrow t$
4) Beraz, bainu jantzia edo botak eramango ditut	4) $s \vee t$ (S. D. 1,2,3.)
1) Lan hau amaituko dut edo ez dut amaituko.	1) $p \vee r$
2) Lan hau amaitzen badut, atsedenaldi bat hartuko dut.	2) $p \rightarrow s$
3) Lan hau ez badut amaitzen, buruko mina edukiko dut.	3) $r \rightarrow t$
4) Beraz, atsedenaldi bat hartuko dut edo buruko mina edukiko dut.	4) $s \vee t$ (S. D.1, 2, 3)

- Adibideak

1. ad.: 1) $-t \vee p$ 2) $-t \rightarrow -m$ 3) $p \rightarrow -t$ ____________ 4) $-m \vee -t$ (S. D. 1, 2, 3)	2. ad.: 1) $m \vee (t \wedge -s)$ 2) $(t \wedge -s) \rightarrow p$ 3) $m \rightarrow t$ ____________ 4) $t \vee p$ (S. D. 1, 2, 3)
3. ad.: 1) $a \vee m$ 2) $a \rightarrow r$ 3) $m \rightarrow (s \wedge -r)$ ____________ 4) $r \vee (s \wedge -r)$ (S. D. 1, 2, 3)	4. ad.: 1) $p \rightarrow m$ 2) $p \vee t$ 3) $t \rightarrow -s$ ____________ 4) $m \vee -s$ (S. D. 1, 2, 3)
5. ad.: 1) $m \rightarrow -t$ 2) $a \rightarrow -d$ 3) $m \vee a$ ____________ 4) $-t \vee -d$ (S. D. 1, 2, 3)	6. ad.: 1) $p \vee -m$ 2) $p \rightarrow r$ 3) $-m \rightarrow s$ ____________ 4) $(r \vee s)$ (S. D. 1, 2, 3)
7. ad.: 1) $-m \vee -s$ 2) $-m \rightarrow (r \wedge -p)$ 3) $-s \rightarrow (-a \wedge b)$ ____________ 4) $(r \wedge -p) \vee (-a \wedge b)$ (S. D. 1, 2, 3)	8. ad.: 1) $-t \vee -p$ 2) $-t \rightarrow r$ 3) $-p \rightarrow m$ ____________ 4) $(r \vee m)$ (S. D. 1, 2, 3)

Erregela honekin, aurreko beste erregelekin bezala, egia-taula egiten badugu, ikus dezakegu tautologia bat dela:

1) $p \vee q$

2) $p \rightarrow r$

3) $q \rightarrow s$

---

4) $r \vee s$

Hori guztia proposizio batetan ipintzen badugu, honela geratuko da:

$$[(p \vee q) \wedge [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)]] \rightarrow (r \vee s)$$

Orain, egia-taula egiten badugu, ikusiko dugu egia izango dela kasu guztietan:

[(p	$\vee$	q)	$\wedge$	[(p	$\rightarrow$	r)	$\wedge$	(q	$\rightarrow$	s)]]	$\rightarrow$	(r	$\vee$	s)
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	**1**	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	**1**	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	**1**	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	**1**	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	**1**	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	**1**	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	**1**	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	**1**	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	**1**	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	**1**	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	**1**	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	**1**	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	**1**	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	**1**	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0

- P. P., T. T., T. P. eta S. D. erregelekin egin beharreko ariketak (1)

1. ariketa. D: -d 1) (p ^ -k) 2) z → -m 3) (-m v b) → -d 4) p → b 5) -(z v p) → -(p ^ -k)	2. ariketa. D: p 1) t → -(z v s) 2) b v -a 3) m v -q 4) t v -b 5) m → z 6) -a → (-k ^ d) 7) -q → s 8) -p → -(-k ^ d)
3. ariketa. D: -(-m ^ e) 1) -z 2) p → s 3) -b → -(s v -a) 4) -z → (p v r) 5) r → -a 6) -b v -(-m ^ e)	4. ariketa. D: x 1) (r v s) → (-z v -t) 2) p → r 3) p v m 4) -z → -a 5) m → s 6) -t → d 7) (-a v d) → x
5. ariketa. D: -(t v w) 1) (a v z) v -b 2) (p v -s) → -m 3) z → -s 4) a → p 5) b 6) (t v w) → m	6. ariketa. D: -r 1) -[-(-m v b) → -d] → -z 2) d 3) z 4) -m → x 5) (x v p) → -s 6) b → p 7) r → s
7. ariketa. D: -m 1) -z v (t v w) 2) (r v s) → -a 3) -z → r 4) -b → a 5) (t v w) → s 6) b → -m	8. ariketa. D: -p 1) -r → -z 2) (t v w) v (a v b) 3) (-k v d) → z 4) a → -k 5) -r v -s 6) -(t v w) 7) -s → t 8) b → d 9) p → -t

- P. P., T. T., T. P. eta S. D. erregelekin egin beharreko ariketak (2)

9. ariketa. D: -b 1) -m → -d 2) r → -x 3) -(-z ∨ -t) ∨ (r ∨ s) 4) s → (-t ∧ -a) 5) [-x ∨ (-t ∧ -a)] → d 6) (-z ∨ -t) 7) b → -m	10. ariketa. D: d 1) -(p ∨ -s) → (-m ∧ e) 2) p → a 3) -(a ∨ z) ∨ -b 4) -s → z 5) -(-m ∧ e) 6) -b → d
11. ariketa. D: -m 1) p ∨ r 2) p → -s 3) r → t 4) (-s ∨ t) → -x 5) m → x	12. ariketa. D: -t 1) z → -p 2) r ∨ s 3) t → z 4) r → x 5) (-m ∨ x) → p 6) s → -m

- P. P., T. T., T. P., eta S. D. erregelekin egindako ariketen emaitzak (1)

1. ariketa: 6) (z ∨ p) (T. T. 1, 5) 7) (-m ∨ b) (S. D. 2, 4, 6) 8) -d (P. P. 3, 7)	2. ariketa: 9) (z ∨ s) (S. D. 3, 5, 7) 10) -t (T. T. 1, 9) 11) -b (T. P. 4, 10) 12) -a (T. P. 2, 11) 13) (-k ∧ d) (P. P. 6, 12) 14) p (T. T. 8, 13)
3. ariketa: 7) (p ∨ r) (P. P. 1,4) 8) (s ∨ -a) (S. D. 2, 5, 7) 9) b (T. T. 3, 8) 10) -(-m ∧ e) (T. P. 6, 9)	4. ariketa: 8) (r ∨ s) (S. D. 2, 3, 5) 9) (-z ∨ -t) (P. P. 1, 8) 10) (-a ∨ d) (S. D. 4, 6, 9) 11) x (P. P. 7, 10)

5. ariketa:		6. ariketa:	
7) (a $\vee$ z)	(T. P. 1, 5)	8) [-(-m $\vee$ b) $\rightarrow$ -d]	(T. T. 1, 3)
8) p $\vee$ -s	(S. D. 3,4, 7)	9) (-m $\vee$ b)	(T. T. 2, 8)
9) -m	(P. P. 2, 8)	10)(x $\vee$ p)	(S. D. 4, 6, 9)
10) -(t $\vee$ w)	(T. T. 6, 9)	11) -s	(P. P. 5, 10)
		12) -r	(T. T. 7, 11)

- P. P., T. T., T. P., eta S. D. erregelekin egindako ariketen emaitzak (2)

7. ariketa:		8. ariketa:	
7) (r $\vee$ s)	(S. D. 1, 3, 5)	10) (a $\vee$ b)	(T. P. 2, 6)
8) -a	(P. P. 2, 7)	11) (-k $\vee$ d)	(S. D. 4, 8, 10)
9) b	(T. T. 4, 8)	12) z	(P. P. 3, 11)
10) -m	(P. P. 6, 9)	13) r	(T. T. 1, 12)
		14) -s	(T. P. 5, 13)
		15) t	(P. P. 7, 14)
		16) -p	(T. T. 9, 15)
9. ariketa:		10. ariketa:	
8) (r $\vee$ s)	(T. P. 3, 6)	7) (p $\vee$ -s)	(T. T. 1, 5)
9) -x $\vee$ (-t $\wedge$ -a)	(S. D. 2, 4, 8)	8) (a $\vee$ z)	(S. D. 2, 4, 7)
10) d	(P. P. 5, 9)	9) -b	(T. P. 3, 8)
11) m	(T. T. 1, 10)	10) d	(P. P. 6, 9)
12) -b	(T. T. 7, 11)		
11. ariketa:		12. ariketa:	
6) (-s $\vee$ t)	(S. D. 1, 2, 3)	7) (x $\vee$ -m)	(S. D. 2, 4, 6)
7) -x	(P. P. 4, 6)	8) p	(P. P. 5, 7)
8) -m	(T. T. 7, 5)	9) -z	(T. T. 1, 8)
		10) -t	(T. T. 3, 9)

4.7. “SILOGISMO HIPOTETIKOA” ERREGELA (S. H.)

$$\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow R \\ \hline P \rightarrow R \end{array}$$

Erregela honek hau dio: bi baldintza badauzkagu, non lehenengoaren atzekaria bigarrenaren aurrekaria den, beste baldintza bat atera dezakegu konklusiotzat, non aurrekaria lehenengo baldintzaren aurrekaria den, eta atzekaria, bigarren baldintzaren atzekaria.

- Hizkuntza arrunteko adibideak

1) Euria egiten badu, etxean geratuko gara.	1) $p \rightarrow r$
2) Etxean geratzen bagara, aspertu egingo gara.	2) $r \rightarrow s$
3) Euria egiten badu, aspertu egingo gara.	3) $p \rightarrow s$ (S. H. 1, 2)
1) Amaren etxera joaten naizenean, asko jaten dut.	1) $p \rightarrow r$
2) Asko jaten dudanean, tripako mina izaten dut.	2) $r \rightarrow s$
3) Beraz, amaren etxera joaten naizenean, tripako mina izaten dut gero.	3) $p \rightarrow s$ (S. H. 1, 2)

- Adibideak

1. ad.: 1) $(m \wedge b) \rightarrow -k$ 2) $-k \rightarrow (p \vee -t)$ 3) $(m \wedge b) \rightarrow (p \vee -t)$ (S. H. 1, 2)	2. ad.: 1) $(p \wedge -k) \rightarrow t$ 2) $t \rightarrow m$ 3) $(p \wedge -k) \rightarrow m$ (S. H. 1, 2)
3. ad.: 1) $-p \rightarrow -m$ 2) $-m \rightarrow r$ 3) $-p \rightarrow r$ (S. H. 1, 2)	4. ad.: 1) $-p \rightarrow (r \vee -t)$ 2) $(r \vee -t) \rightarrow (a \wedge -m)$ 3) $-p \rightarrow (a \wedge -m)$ (S. H. 1, 2)

5. ad.:	6. ad.:
1) $k \to m$ 2) $m \to r$ ___________ 3) $k \to r$ (S. H. 1, 2)	1) $-m \to -k$ 2) $-k \to -r$ ___________ 3) $-m \to -r$ (S. H. 1, 2)
7. ad.:	**8. ad.:**
1) $-(p \wedge k) \to -m$ 2) $-m \to -(s \vee t)$ ___________ 3) $-(p \wedge k) \to -(s \vee t)$ (S. H. 1, 2)	1) $p \to -k$ 2) $-k \to m$ ___________ 3) $p \to m$ (S. H. 1, 2)

Beste erregelekin egin dugun bezala, silogismo hipotetikoaren erregela proposizio bihurtzen badugu:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

eta haren egia-taula egiten badugu, ikusiko dugu tautologia bat dela, edo kasu guztietan egia izango dela:

[(p	→	q)	∧	(q	→	r)]	→	(p	→	r)
1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	**1**	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	**1**	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	**1**	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	**1**	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	**1**	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	**1**	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0

- Ariketak silogismo hipotetikoaren erregelarekin eta aurrez aztertutako beste erregelekin (1)

1. ariketa. D: $-k \vee x$ 1) $d \rightarrow r$ 2) $-(-z \rightarrow b) \vee m$ 3) $-(s \vee t) \rightarrow -(p \rightarrow r)$ 4) $d \rightarrow b$ 5) $s \rightarrow -k$ 6) $-z \rightarrow d$ 7) $m \rightarrow (p \rightarrow d)$ 8) $t \rightarrow x$	2. ariketa. D: $p \rightarrow -a$ 1) $m \rightarrow -a$ 2) b 3) $-[-(p \rightarrow m) \rightarrow r] \rightarrow -b$ 4) $-r$
3. ariketa. D: $-m$ 1) $-(p \vee -z)$ 2) $x \rightarrow r$ 3) $-(-k \rightarrow x) \rightarrow (p \vee -z)$ 4) $(-k \rightarrow r) \rightarrow (-s \vee -m)$ 5) s	4. ariketa. D: $-m$ 1) $(p \rightarrow -z) \vee r$ 2) $-(p \rightarrow s) \vee -a$ 3) $-z \rightarrow s$ 4) $-a \rightarrow (-t \rightarrow b)$ 5) $(-t \rightarrow k) \rightarrow -m$ 6) $b \rightarrow k$ 7) $-r$

- Ariketak silogismo hipotetikoaren erregelarekin eta aurrez aztertutako beste erregelekin (2)

5. ariketa. D: $-z \vee -s$ 1) $-a \rightarrow -s$ 2) $-m \rightarrow r$ 3) $(-k \rightarrow r) \rightarrow (-t \vee -a)$ 4) $-k \rightarrow -m$ 5) $-t \rightarrow -z$	6. ariketa. D: $-k$ 1) $(p \vee -z) \rightarrow (r \rightarrow -t)$ 2) $-d \vee -m$ 3) $b \rightarrow -z$ 4) $-d \rightarrow -k$ 5) $a \rightarrow p$ 6) $-t \rightarrow -a$ 7) $a \vee b$ 8) $-m \rightarrow -(r \rightarrow -a)$
7. ariketa. D: k 1) $(p \rightarrow -t) \rightarrow m$ 2) $p \rightarrow -(-k \rightarrow r)$ 3) $-m \vee -s$ 4) $-(-k \rightarrow r) \rightarrow -t$ 5) $-k \rightarrow s$	8. ariketa. D: $-k \rightarrow -a$ 1) $-r$ 2) $(-k \rightarrow -m) \vee r$ 3) $-(-t \rightarrow k) \vee (-m \rightarrow -a)$ 4) $(-t \rightarrow k)$
9. ariketa. D: $-a$ 1) $p \vee -m$ 2) $p \rightarrow r$ 3) $(r \vee s) \rightarrow (-t \rightarrow b)$ 4) $(-t \rightarrow k) \rightarrow d$ 5) $-m \rightarrow s$ 6) $a \rightarrow -d$ 7) $b \rightarrow k$	10. ariketa. D: a 1) $-t \rightarrow -(k \rightarrow -r)$ 2) $m \rightarrow -r$ 3) $a \vee -t$ 4) $k \rightarrow m$
11. ariketa. D: $-m$ 1) $t \rightarrow -x$ 2) $m \rightarrow -z$ 3) $-x \rightarrow s$ 4) $(t \rightarrow s) \rightarrow -r$ 5) $r \vee z$	12. ariketa. D: $a \rightarrow -t$ 1) $p \rightarrow -(-m \vee z)$ 2) $x \rightarrow p$ 3) $r \vee s$ 4) $x \vee (a \rightarrow b)$ 5) $s \rightarrow -m$ 6) $b \rightarrow -t$ 7) $r \rightarrow z$

- Silogismo hipotetikoaren erregelarekin eta aurrez aztertutako beste erregelekin egindako ariketen emaitzak (1)

1. ariketa: 9) $(-z \to b)$ (S. H. 4, 6) 10) m (T. P. 2, 9) 11) $p \to d$ (P. P. 7, 10) 12) $p \to r$ (S. H. 1, 11) 13) $s \vee t$ (T. T. 3, 12) 14) $-k \vee x$ (S. D. 5, 8, 13)	2. ariketa: 5) $[-(p \to m) \to r]$ (T. T. 2, 3) 6) $(p \to m)$ (T. T. 4, 5) 7) $(p \to -a)$ (S. H. 1, 6)
3. ariketa: 6) $-k \to x$ (T. T. 1, 3) 7) $-k \to r$ (S. H. 2, 6) 8) $-s \vee -m$ (P. P. 4, 7) 9) $-m$ (T. P. 5, 8)	4. ariketa: 8) $p \to -z$ (T. P. 1, 7) 9) $p \to s$ (S. H. 3, 8) 10) $-a$ (T. P. 2, 9) 11) $-t \to b$ (P. P. 4, l0) 12) $-t \to k$ (S. H. 6, 11) 13) $-m$ (P. P. 5, 12)
5. ariketa: 6) $(-k \to r)$ (S. H. 2, 4) 7) $-t \vee -a$ (P. P. 3, 6) 8) $-z \vee -s$ (S. D. 1, 5, 7)	6.ariketa: Lehenengo emaitza: 9) $(p \vee -z)$ (S. D. 3, 5, 7) 10) $r \to -t$ (P. P. 1, 9) 11) $r \to -a$ (S. H. 6, 10) 12) m (T. T. 8, 11) 13) $-d$ (T. P. 2, 12) 14) $-k$ (P. P. 4, 13)
6.ariketa: Bigarren emaitza: 9) $-k \vee (r \to -a)$ (S. D. 3, 5, 7) 10) $(p \vee -z)$ (S. D. 3, 5, 7) 11) $r \to -t$ (P. P. 1, 10) 12) $r \to -a$ (S. H. 6, 11) 13) $-k$ (T. P. 9, 12)	7. ariketa: 6) $(p \to -t)$ (S. H. 2,4) 7) m (P. P. 1, 6) 8) $-s$ (T. P. 3, 7) 9) k (T. T. 5, 8)

8. ariketa:		9. ariketa:	
5) $-k \rightarrow -m$	(T. P. 1, 2)	8) $(r \vee s)$	(S. D. 1, 2, 5)
6) $-m \rightarrow -a$	(T. P. 3, 4)	9) $(-t \rightarrow b)$	(P. P. 3, 8
7) $-k \rightarrow -a$	(S. H. 5, 6)	10) $(-t \rightarrow k)$	(S. H. 7, 9)
		11) d	(P. P. 4, l0)
		12) -a	(T. T. 6, 11)

- Silogismo hipotetikoaren erregelarekin eta aurrez aztertutako beste erregelekin egindako ariketen emaitzak (2)

10. ariketa:		11. ariketa:	
5) $(k \rightarrow -r)$	(S. H. 2, 4)	6) $t \rightarrow s$	(S. H. 1, 3)
6) t	(T. T. 1, 5)	7) -r	(P. P. 4, 6)
7) a	(T. P. 3, 6)	8) z	(T. P. 5, 7)
		9) -m	(T. T. 2, 8)

12. ariketa:	
8) $-m \vee z$	(S. D. 3, 5, 7)
9) -p	(T. T. 1, 8)
6) -x	(T. T. 2, 9)
7) $a \rightarrow b$	(T. P. 4, 10)
8) $a \rightarrow -t$	(S. H. 6, 11)

4.8. SINPLIFIKAZIOAREN ERREGELA (S.)

1) $P \wedge Q$	
2) P	(S. 1)
3) Q	(S. 1)

Erregela honek hau dio: konjuntzio bat emanda, konjuntzio horren proposizioak atera ditzakegu konklusiotzat.

- Hizkuntza arrunteko adibideak

1) Hotza eta euria egiten du.	1) $p \wedge r$
2) (Beraz,) Euria egiten du.	2) r (S. 1)
3) (Beraz,) Hotz egiten du.	3) p (S. 1)
1) Gose eta egarri naiz.	1) $p \wedge r$
2) Beraz, gose naiz.	2) p (S. 1)
3) Beraz, egarri naiz.	3) r (S. 1)

- Adibideak

1. ad.:	2. ad.:	3. ad.:
1) $a \wedge -r$	1) $z \wedge k$	1) $-p \wedge -k$
2) a (S. 1)	2) z (S. 1)	2) $-p$ (S. 1)
3) $-r$ (S. 1)	3) k (S. 1)	3) $-k$ (S. 1)

4. ad.:	5. ad.:
1) $-m \wedge (r \leftrightarrow s)$	1) $(p \vee k) \wedge -m$
2) $-m$ (S. 1)	2) $(p \vee k)$ (S. 1)
3) $(r \leftrightarrow s)$ (S. 1)	3) $-m$ (S. 1)
6. ad.:	**7. ad.:**
1) $-(p \vee k) \wedge -(r \vee s)$	1) $(p \rightarrow k) \wedge -(r \rightarrow -m)$
2) $-(p \vee k)$ (S. 1)	2) $(p \rightarrow k)$ (S. 1)
3) $-(r \vee s)$ (S. 1)	3) $-(r \rightarrow -m)$ (S. 1)

Beste erregelekin egin dugun bezala, erregela hau proposizio bihurtzen badugu:

$$(p \wedge q) \rightarrow p \quad \text{edo} \quad (p \wedge q) \rightarrow q$$

Eta haien egia-taulak egiten baditugu, ikusiko dugu tautologia bat dela, edo kasu guztietan egia izango dela:

(p	^	q)	→	p
1	1	1	**1**	1
1	0	0	**1**	1
0	0	1	**1**	0
0	0	0	**1**	0

eta

(p	^	q)	→	q
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0

- Sinplifikazioaren erregela eta aurrez emandako erregela guztiak erabiltzeko ariketak (1)

1. ariketa. D: -x 1) -k → -p 2) (-a → -p) → (m ^ b) 3) -a → -k 4) -b v -x	2. ariketa. D: -s 1) -k → -z 2) t → z 3) (-r → -z) →(-d ^ t) 4) p v -m 5) r → a 6) -r → -k 7) r → (a ^ -p) 8) -m → -s
3. ariketa. D: -b 1) p → -r 2) m 3) -x → (p v k) 4) r v -b 5) -k ^ (-x v -m)	4. ariketa. D: -t 1) (p v -b) → (a ^ -d) 2) -m → -b 3) s v -m 4) -z v d 5) s → p 6) t → z
5. ariketa.D: m 1) -[-(m ^ b) → x]→ s 2) -x 3) -s	6. ariketa. D: -z 1) -r → t 2) (-p → t) → (m v b) 3) (-a → -k) ^ (-p → -r) 4) -b v -z 5) (-a → -k) → (m → -x) 6) b → -s 7) r → x 8) t → -(-x v -s)

- Sinplifikazioaren erregela eta aurrez emandako erregela guztiak erabiltzeko ariketak (2)

7. ariketa. D: -x ^ -m 1) -b → (p ˅ k) 2) (p → -r) ^ (-b ˅ s) 3) -(-x ^ -m) → -(p ˅ k) 4) -k → p 5) (-k → -r) → -s	8. ariketa. D: -z 1) -d → -p 2) (-r → -x) → (t ^ s) 3) (a ^ -d) ˅ -m 4) -p → (-r → -k) 5) k → -z 6) -p ^ m 7) -k → -x 8) k ˅ -s
9. ariketa. D: -k 1) (p ^ -x) ˅ -t 2) s ^ t 3) a ˅ x 4) -a ˅ -b 5) b ˅ (-z ^ -k)	10. ariketa. D: -d 1) -(s ^ t) → a 2) k 3) -(p ^ -x) → -t 4) p → (-m ˅ -k) 5) -a ^ -b 6) d → m
11. ariketa. D: m 1) -(a ^ -d) → -s 2) -p ^ -b 3) d ˅ -z 4) s ˅ p 5) -z → -t 6) -(x ^ m) → t	12. ariketa. D: -m ˅ b 1) -(-a ^ -k) → r 2) -r → -m 3) -r 4) -k → (-r ˅ t) 5) t → b
13. ariketa. D: k 1) p → (r ^ k) 2) -s → t 3) t → -m 4) (-s → -m) → -x 5) -p → x	14. ariketa. D: m 1) p ˅ r 2) -(m ^ a) → z 3) p → s 4) z → x 5) r → -t 6) (s ˅ -t) → -x

- Sinplifikazioaren erregela eta aurrez emandako erregela guztiak erabiltzeko egindako ariketen emaitzak (1)

1. ariketa: 5) $(-a \rightarrow -p)$ (S. H. 1, 3) 6) $m \wedge b$ (P. P. 2, 5) 7) b (S. 6) 8) -x (T. P. 4, 7)	2. ariketa: 9) $-r \rightarrow -z$ (S. H. 1, 6) 10) $(-d \wedge t)$ (P. P. 3, 9) 11) t (S. 10) 12) z (P. P. 2, 11) 13) k (T. T. 1, 12) 14) r (T. T. 6, 13) 15) $(a \wedge -p)$ (P. P. 7, 14) 16) -p (S. 15) 17) -m (T. P. 4, 16) 18) -s (P. P. 8, 17)
3. ariketa: 6) $(-x \vee -m)$ (S. 5) 7) -x (T. P. 2, 6) 8) $(p \vee k)$ (P. P. 3, 7) 9) -k (S. 5) 10) p (T. P. 8, 9) 11) -r (P. P. 1, 10) 12) -b (T. P. 4, 11)	4. ariketa: 7) $p \vee -b$ (S. D. 2, 3, 5) 8) $(a \wedge -d)$ (P. P. 1, 7) 9) -d (S. 8) 10) -z (T. P. 4, 9) 11) -t (T. T. 6, 10)
5. ariketa: 4) $-(m \wedge b) \rightarrow -c$ (T. T. 1, 3) 5) $m \wedge b$ (T. T. 2, 4) 6) m (S. 5)	6. ariketa: 9) $(-p \rightarrow -r)$ (S. 3) 10) $(-p \rightarrow t)$ (S. H. 1, 9) 11) $(m \vee b)$ (P. P. 2, 10) 12) $(-a \rightarrow -k)$ (S. 3) 13) $(m \rightarrow -x)$ (P. P. 5, 12) 14) $-x \vee -s$ (S. D. 6, 11, 13) 15) -t (T. T. 8, 14) 16) r (T. T. 1, 15) 17) x (P. P. 7, 16) 18) -m (T. T. 13, 17) 19) b (T. P. 11, 18) 20) -z (T. P. 19, 4)

- Sinplifikazioaren erregela eta aurrez emandako erregela guztiak erabiltzeko egindako ariketen emaitzak (2)

7. ariketa: 6) $p \rightarrow -r$ (S. 2) 7) $-k \rightarrow -r$ (S. H. 4, 6) 8) $-s$ (P. P. 5, 7) 9) $(-b \vee s)$ (S. 2) 10) $-b$ (T. P. 8, 9) 11) $(p \vee k)$ (P. P. 1, 10) 12) $(-x \wedge -m)$ (T. T. 3, 11)	8. ariketa: 9) m (S. 6) 10) $(a \wedge -d)$ (T. P. 3, 9) 11) $-d$ (S. 10) 12) $-p$ (P. P. 1, 11) 13) $(-r \rightarrow -k)$ (P. P. 4, 12) 14) $-r \rightarrow -x$ (S. H. 7, 13) 15) $(t \wedge s)$ (P. P. 2, 14) 16) s (S. 15) 17) k (T. P. 8, 16) 18) $-z$ (P. P. S, 17)
9. ariketa: 6) t (S. 2) 7) $(p \wedge -x)$ (T. P. 1, 6) 8) $-x$ (S. 7) 9) a (T. P. 3, 8) 10) $-b$ (T. P. 4, 9) 11) $(-z \wedge -k)$ (T. P. S, 10) 12) $-k$ (S. 11)	10. ariketa: 7) $-a$ (S. 5) 8) $(s \wedge t)$ (T. T 1, 7) 9) t (S. 8) 10) $(p \wedge -x)$ (T. T. 3, 9) 11) p (S. 10) 12) $(-m \vee -k)$ (P. P. 4, 11) 13) $-m$ (T. P. 2, 12) 14) $-d$ (T. T. 6, 13)
11. ariketa: 7) $-p$ (S. 2) 8) s (T. P. 4, 7) 9) $(a \wedge -d)$ (T. T. 1, 7) 10) $-d$ (S. 8) 11) $-z$ (T. P. 3, 9) 12) $-t$ (P. P. 5, 10) 13) $x \wedge m$ (T. T. 6, 11) 14) m (S. 12)	12. ariketa: 6) $(-a \wedge -k)$ (T. T. 1, 3) 7) $-k$ (S. 6) 8) $-r \vee t$ (P. P. 4, 7) 9) $-m \vee b$ (S. D. 2, 5, 8)

13. ariketa:		14. ariketa:	
6) $-s \rightarrow -m$	(S. H. 2, 3)	7) $s \vee -t$	(S. D. 1, 3, 5)
7) $-x$	(P. P. 4, 6)	8) $-x$	(P. P. 6, 7)
8) p	(T. T. 5, 7)	9) $-z$	(T. T. 4, 8)
9) $r \wedge k$	(P. P. 1, 8)	10) $m \wedge a$	(T. T. 2, 9)
10) k	(S. 9)	11) m	(S. 10)

4.9. KONJUNTZIOA SARTZEKO ERREGELA (K. S.)

P	P
Q	Q
―――――――	―――――――
$P \wedge Q$	$Q \wedge P$

Erregela honek dio premisa guztiak konjuntzio batean batu daitezkeela.

- Hizkuntza arrunteko adibideak

1) Etxera joango naiz.	1) p
2) Telebista ikusiko dut.	2) r
―――――――――――――――――	―――――――
3) Etxera joango naiz eta telebista ikusiko dut.	3) $p \wedge r$ (K. S. 1, 2)
1) *Egunero hasten delako* irakurriko dut.	1) p
2) Mendian ibiliko naiz.	2) r
―――――――――――――――――	―――――――
3) Mendian ibiliko naiz eta *Egunero hasten delako* irakurriko dut.	3) $p \wedge r$ (K. S. 1, 2)

- Adibideak (1)

1. ad.:	2. ad.:
1) -m	1) p
2) -p	2) r
___	___
3) -m ^ -p (K. S. 1, 2)	3) p ^ r (K. S. 1, 2)

- Adibideak (2)

3. ad.:	4. ad.:
1) m	1) -m
2) p	2) (-p ˅ -t)
___	___
3) m ^ p (K. S. 1, 2)	3) -m ^ (-p ˅ -t) (K. S. 1, 2)
5. ad.:	6. ad.:
1) (-p ˅ b)	1) -(b ˅ -m)
2) (a ˅ -m)	2) -(t ↔ -p)
___	___
3) (-p ˅ b) ^ (a ˅ -m) (K. S. 1, 2)	3) (b ˅ -m) ^ (t ↔ -p) (K. S. 1,2)
7. ad.:	
1) -(t ↔ -p)	
2) -(a ˅ -m)	
___	
3) -(t ↔ -p) ^ -(a ˅ -m) (K. S. 1, 2)	

Beste erregelekin egin dugun bezala, erregela hau proposizio bihurtzen badugu:

p ^ q → (p ^ q)

eta haren egia-taula egiten badugu, ikusiko dugu kasu guztietan egia izango dela, tautologia dela.

p	^	q	→	(p	^	q)
1	1	1	**1**	1	1	1
1	0	0	**1**	1	0	0
0	0	1	**1**	0	0	1
0	0	0	**1**	0	0	0

- Konjuntzioa sartzeko erregela eta eta aurrez emandako erregela guztiak erabiltzeko ariketak (1)

1. ariketa. D: -r 1) -k → (-x ^ -z) 2) s ^ -k 3) -(-z ^ s) ˅ t 4) r → -(t ^ -k)	2. ariketa. D: -k 1) [(-b ˅ p) ^ (-x ˅ d)] → -k 2) r ˅ -m 3) r → -b 4) -s ˅ t 5) -m → p 6) -s → -x 7) t → d
3. ariketa. D: -k ^ -z 1) (-x → -s) → (t ^ p) 2) -a → -s 3) -k 4) -m 5) -x → -a 6) (p ^ -m) → -z	4. ariketa. D: -z 1) p ^ -d 2) -(-x ^ -k) ˅ -z 3) -[(m ^ -x) ˅ k] → d 4) -a ^ -k
5. ariketa. D: k 1) (-r ^ b) ˅ -(-p ^ d) 2) -k ^ -p 3) d ^ -x 4) -k → -(-r ^ -x)	6. ariketa. D: (-a ˅ t) ^ k 1) -p → -a 2) -x → (-p ˅ r) 3) r → t 4) -(-x ^ -m) → b 5) k ^ -b
7. ariketa. D: -z 1) -x ^ -s 2) -(m ^ -k) → -(-s ^ -p) 3) -p ^ -a 4) -b 5) (m ^ -b) → d 6) d → -z	8. ariketa. D: -b ^ -x 1) t 2) [(-k → -s) ^ (-s → r)] 3) (t ^ -m) → -b 4) (-k → r) → -m 5) -p ^ -x
9. ariketa. D: -a 1) (-m ^ x) ˅ k 2) (-m ^ p) → -a 3) -k ^ d 4) (x ^ d) → p	10. ariketa. D: -z 1) (-m ^ d) → -x 2) (-m ^ b) ˅ k 3) -p → x 4) (p ^ r) → -a 5) -k ^ d 6) a ˅ t 7) r 8) z → -t

- Konjuntzioa sartzeko erregela eta eta aurrez emandako erregela guztiak erabiltzeko ariketak (2)

11. ariketa. D: -x	12. ariketa. D: $-z \wedge d$
1) $a \wedge p$	1) $p \vee x$
2) $z \rightarrow -x$	2) $z \rightarrow -b$
3) $r \wedge t$	3) $r \wedge -s$
4) $m \rightarrow -(a \wedge t)$	4) $x \rightarrow b$
5) $z \vee m$	5) d
	6) $t \wedge -m$
	7) $p \rightarrow -(-s \wedge -m)$

- Konjuntzioa sartzeko erregelarekin eta aurrez ikusi ditugun erregela guztiekin egindako ariketen emaitzak (1)

1. ariketa:		2. ariketa:	
5) -k	(S. 2)	8) $-b \vee p$	(S. D. 2, 3, 5)
6) $(-x \wedge -z)$	(P.P. 1, 5)	9) $-x \vee d$	(S. D. 4, 6, 7)
7) -z	(S. 6)	10) $(-b \vee p) \wedge (-x \vee d)$	(K. S. 8, 9)
8) s	(S. 2)	11) -k	(P. P. 1, 10)
9) $-z \wedge s$	(K. S. 7, 8)		
10) t	(T. P. 3, 9)		
11) $t \wedge -k$	(K. S. 5, 10)		
12) -r	(T. T.4, 11)		
3. ariketa:		**4. ariketa:**	
7) $-x \rightarrow -s$	(S. H. 2, 5)	5) -d	(S. 1)
8) $(t \wedge p)$	(P. P. **1**, 7)	6) $(m \wedge -x) \vee k$	(T. T. 3, 5)
9) p	(S. 8)	7) -k	(S. 4)
10) $p \wedge -m$	(K. S. 4, 9)	8) $(m \wedge -x)$	(T. P. 6, 7)
11) -z	(P. P. 6, 10)	9) -x	(S. 8)
12) $-k \wedge -z$	(K. S. 3, 11)	10) $-x \wedge -k$	(K. S. 7, 9)
		11) -z	(T. P. 2, 10)

5. ariketa:		6. ariketa:	
5) $-p$	(S. 2)	6) $-b$	(S. 5)
6) d	(S. 3)	7) $-x \wedge -m$	(T. T. 4, 6)
7) $-p \wedge d$	(K. S. 5, 6)	8) $-x$	(S. 6)
8) $-r \wedge b$	(T. P. 1, 7)	9) $-p \vee r$	(P. P. 2, 7)
9) $-r$	(S. 8)	10) $-a \vee t$	(S. D. 1, 3, 8)
10) $-x$	(S. 3)	11) k	(S. 5)
11) $-r \wedge -x$	(K. S. 9, 10)	12) $(-a \vee t) \wedge k$	(K. S. 9, 10)
12) k	(T. T. 4, 11)		

- Konjuntzioa sartzeko erregelarekin eta aurrez ikusi ditugun erregela guztiekin egindako ariketen emaitzak (2)

7. ariketa:		8. ariketa:	
7) $-s$	(S. 1)	6) $-k \rightarrow -s$	(S. 2)
8) $-p$	(S. 3)	7) $-s \rightarrow r$	(S. 2)
9) $-s \wedge -p$	(K. S. 6, 8)	8) $-k \rightarrow r$	(S. H. 6, 7)
10) $m \wedge -k$	(T. T. 2, 9)	9) $-m$	(P. P. 4, 8)
11) m	(S. 10)	10) $t \wedge -m$	(K. S. 1, 9)
12) $m \wedge -b$	(K. S. 4, 11)	11) $-b$	(P. P. 3, 10)
13) d	(P. P. 5, 12)	12) $-x$	(S. 5)
14) $-z$	(P. P. 6, 13)	13) $-b \wedge -x$	(K. S. 11, 12)

9. ariketa:		10. ariketa:	
5) -k (S.3)		9) -k	(S. 5)
6) -m ^ x	(T. P. 1, 5)	10) (-m ^ b)	(T. P. 2, 9)
7) x	(S. 6)	11) d	(S. 5)
8) d	(S. 3)	12) -m	(S. 10)
9) x ^ d	(K. S. 7, 8)	13) -m ^ d	(K. S. 11, 12)
10) p	(P. P. 4, 9)	14) -x	(P. P. 1, 13)
11) -m	(S. 6)	15) p	(T. T. 3, 14)
12) -m ^ p	(K. S. 10, 11)	16) p ^ r	(K. S. 7, 15)
13 -a	(P. P. 2, 12)	17) -a	(P. P. 4, 16)
		18) t	(T. P. 6, 17)
		19) -z	(T. T. 8, 18)

11. ariketaren emaitzak.

Lehenengo emaitza:		Bigarren emaitza:	
6) a	(S. 1)	6) -x ∨ -(a ^ t)	(S. D. 2, 4, 5)
7) t	(S. 3)	7) a	(S. 1)
8) a ^ t	(K. S. 6, 7)	8) t	(S. 1)
9) -m	(T. T. 4, 8)	9) (a ^ t)	(K. S. 7, 8)
10) z	(T. P. 5, 9)	10) -x	(T. P. 6, 9)
11) -x	(P. P. 2, 10)		

12. ariketaren emaitzak.

Lehenengo emaitza:		Bigarren emaitza:	
8) -s	(S. 3)	8) -(- s ^ -m) ∧ b	(S. D. 1, 4, 7)
9) -m	(S. 6)	9) -s	(S. 3)
10) -s ^ -m	(K. S. 8, 9)	10) -m	(S. 6)
11) -p	(T. T. 7, 10)	11) -(- s ^ -m)	(K. S. 9, 10)
12) x	(T. P. 1, 11)	12) b	(T. P. 8, 11)
13) b	(P. P. 4,12)	13) -z	(T. T. 2, 12)
14) -z	(T. T. 2, 13)	14) -z ^ d	(K. S. 5, 13)
15) -z ^ d	(K. S. 5, 14)		

4.10. DISJUNTZIOA SARTZEKO ERREGELA (D. S.)

P ――――― $P \vee Q$	Q ――――― $P \vee Q$

Erregela honek hau dio: premisa bat emanda, premisa hori duen disjuntzio bat eraiki dezakegu konklusiotzat.

- Hizkuntza arrunteko adibideak

1) Asko ikasiko dut. ――――――――――――― 2) Asko ikasiko dut edo etxe honetan hotz egiten du.	1) p ――――― 2) $p \vee r$
1) Itsasoan arrainak daude. ――――――――――――― 2) Itsasoan arrainak daude edo nik ile gorria daukat.	1) p ――――― 2) $p \vee r$

- Adibideak (1)

1. ad.: 1) $-(r \wedge -m)$ ――――――― 2) $-(r \wedge -m) \vee k$ (D. S. 1)	2. ad.: 1) $-a$ ――――――― 2) $-p \vee -a$ (D. S. 1)
3. ad.: 1) m ――――――― 2) $m \vee -p$ (D. S.. 1)	4. ad.: 1) $a \rightarrow -m$ ――――――― 2) $(a \rightarrow -m) \vee s$ (D. S. 1)

- Adibideak (2)

5. ad.: 1) m ――――――― 2) $m \vee p$ (D. S. 1)	6. ad.: 1) $(a \wedge -p)$ ――――――― 2) $(a \wedge -p) \vee m$ (D. S. 1)

Beste erregelekin egin dugun bezala, erregela hau proposizio bihurtzen badugu:

$p \rightarrow (p \vee q)$

eta haren egia-taula egiten badugu, ikusiko dugu tautologia bat dela, edo kasu guztietan egia dela:

p	→	(p	∨	q)
1	**1**	1	1	1
1	**1**	1	1	0
0	**1**	0	1	1
0	**1**	0	0	0

- Disjuntzioa sartzeko erregela eta aurrez emandako erregela guztiak aplikatzeko ariketak (1)

1. ariketa. D: -t	2. ariketa. D: -m
1) -r ∨ b	1) a → -k
2) (-x ∨ -k) → -t	2) (-k ∨ d) → -m
3) p ∧ -r	3) d ∧ k
4) b → -k	4) -(a ∨ b) → (s ∨ t)
5) -r → -x	5) b → d
	6) -(s ∨ t)

- Disjuntzioa sartzeko erregela eta aurrez emandako erregela guztiak aplikatzeko ariketak (2)

3. ariketa. D: -s ∧ -k	4. ariketa. D: -r
1) -s	1) b ∧ z
2) -s → -a	2) (-x ∨ z) → t
3) b → -z	3) a ∧ b
4) (-a ∨ -z) → r	4) (b ∨ -m) → d
5) -x ∧ -m	5) p → -t
6) -(-m ∧ r) ∨ -k	6) (d ∨ -k) → -x
	7) r → p

5. ariketa. D: $-a$ 1) $(-x \rightarrow -k) \wedge r$ 2) $a \rightarrow -(p \vee -t)$ 3) $-k \rightarrow r$ 4) $(-x \rightarrow r) \rightarrow p$	6. ariketa. D: $-b$ 1) $-(-m \vee -x) \rightarrow -p$ 2) $t \wedge p$ 3) x 4) $(-m \vee s) \rightarrow -b$ 5) $(x \vee a) \rightarrow p$
7. ariketa. D: $-k \vee d$ 1) $-a \rightarrow m$ 2) $-p \rightarrow -k$ 3) $t \rightarrow -p$ 4) $-r \wedge -m$ 5) $(a \vee -x) \rightarrow t$ 6) $b \rightarrow d$	8. ariketa. D: $-k$ 1) $(-x \vee b) \rightarrow -k$ 2) $-m \wedge r$ 3) $m \vee p$ 4) $-p \vee s$ 5) $(s \vee t) \rightarrow -x$ 6) $d \wedge -x$
9. ariketa. D: $-m$ 1) $-(k \vee x) \vee -a$ 2) $s \wedge -p$ 3) $(-a \vee -b) \rightarrow -m$ 4) $-k \rightarrow p$ 5) $(-k \rightarrow t) \rightarrow (k \vee x)$ 6) $p \rightarrow t$ 7) $(-a \vee b) \rightarrow -m$	10. ariketa. D: $a \vee -p$ 1) $-m \wedge b$ 2) $-(-m \vee -s) \vee d$ 3) $d \rightarrow -x$ 4) $-a \rightarrow -(-x \vee -k)$
11. ariketa. D: m 1) $s \wedge k$ 2) $a \rightarrow m$ 3) $-r \rightarrow (a \vee b)$ 4) $b \rightarrow x$ 5) $r \rightarrow -(k \vee t)$ 6) $-x$	12. ariketa. D: x 1) $-x \rightarrow b$ 2) $p \rightarrow -b$ 3) $z \rightarrow -(-s \vee r)$ 4) $(-m \vee t) \rightarrow -s$ 5) $z \vee p$ 6) $r \wedge -m$

- Disjuntzioa sartzeko erregela eta aurrez emandako erregela guztiak aplikatzeko egindako ariketen emaitzak (1)

1. ariketaren emaitzak.

Lehenengo emaitza:		Bigarren emaitza:	
6) -x ∨ -k	(S. D. 1, 4, 5)	6) -r	(S. 3)
7) -t	(P. P. 2, 6)	7) -r ∨ b	(D. S. 6)
		8) -x ∨ -k	(S. D. 4, 5, 7)
		9) -t	(P. P. 2, 8)

2. ariketaren emaitzak.

Lehenengo emaitza:		Bigarren emaitza:	
7) a ∨ b	(T. T. 4, 6)	7) d	(S. 3)
8) -k ∨ d	(S. D. 1, 5, 7)	8) -k ∨ d	(S. D. 7)
9) -m	(P. P. 2, 8)	9) -m	(P. P. 2, 8)

3. ariketaren emaitzak.

Lehenengo emaitza:		Bigarren emaitza:	
7) (-s ∨ b)	(D. S. 1)	7) -a	(P. P. 1, 2)
8) -a ∨ -z	(S. D. 2, 3, 7)	8) -a ∨ -z	(D. S. 7)
9) r	(P. P. 4, 8)	9) r	(P. P. 4, 8)
10) -m	(S. 5)	10) -m	(S. 5)
11) -m ∧ r	(K. S. 9, 10)	11) -m ∧ r	(K. S. 9, 10)
12) -k	(T. P. 6, 11)	12) -k	(T. P. 6, 11)
13) -s ∧ -k	(K. S.. 1, 12)	13) -s ∧ -k	(K. S. 1, 12)

4. ariketaren emaitzak.

Lehenengo emaitza:		Bigarren emaitza:	
8) b	(S. 3)	8) z	(S. 1)
9) b ∨ -m	(D. S. 8)	9) -x ∨ z	(D. S. 8)
10) d	(P. P. 4, 9)	10) t	(P. P. 2, 9)
11) d ∨ -k	(D. S. 10)	11) -p	(T. T. 5, 10)
12) -x	(P. P. 6, 11)	12) -r	(T. T. 7, 11)
13) -x ∨ z	(D. S. 12)		
14) t	(P. P. 2, 13)		
15) -p	(T. T. 5, 14)		
16) -r	(T. T. 7, 15)		

5. ariketa:

5) -x → -k	(S. 1)
6) -x → r	(S. H. 3, 5)
7) p	(P. P. 4, 6)
8) p ∨ -t	(D. S. 7)
9) -a	(T. T. 2, 8)

- Disjuntzioa sartzeko erregela eta aurrez emandako erregela guztiak aplikatzeko egindako ariketen emaitzak (2)

6. ariketaren emaitzak.

Lehenengo emaitza:		Bigarren emaitza:	
6) p	(S. 2)	6) $x \vee a$	(D. S. 3)
7) $-m \vee -x$	(T. T. 1, 6)	7) p	(P. P. 5, 6)
8) $-m$	(T. P. 3, 7)	8) $-m \vee -x$	(T. T. 1, 7)
9) $-m \vee s$	(D. S. 8)	9) $-m$	(T. P. 3, 8)
10) $-b$	(P. P. 4, 9)	10) $-m \vee s$	(D. S. 9)
		11) $-b$	(P. P. 4, 10)

7. ariketaren emaitzak.

Lehenengo emaitza:		Bigarren emaitza:		Hirugarren emaitza:	
7) $-m$	(S. 4)	7) $-m$	(S. 4)	7) $-m$	(S. 4)
8) a	(T. T. 1, 7)	8) a	(T. T. 1, 7)	8) a	(T. T. 1, 7)
9) $a \vee -x$	(D. S. 8)	9) $(a \vee x) \rightarrow -p$	(S. H. 3, 5)	9) $a \vee -x$	(D. S. 8)
10) t	(P. P. 5, 9)	10) $(a \vee x) \rightarrow -k$	(S. H. 2, 9)	10) t	(P. P. 5, 9)
11) $-p$	(P. P. 3, 10)	11) $a \vee x$	(D. S. 8)	11) $-p$	(P. P. 3, 10)
12) $-k$	(P. P. 2, 11)	12) $-k$	(P. P. 10, 11)	12) $-p \vee b$	(D. S. 11)
13) $-k \vee d$	(D. S. 12)	13) $-k \vee d$	(D. S. 12)	13) $-k \vee d$	(S. D.2,6,12)

8. ariketaren emaitzak.

Lehenengo emaitza:		Bigarren emaitza:	
7) $-m$	(S. 2)	7) $-x$	(S. 6)
8) p	(T. P. 3, 7)	8) $-x \vee b$	(D. S. 7)
9) s	(T. P. 4, 8)	9) $-k$	(P. P. 1, 8)
10) $s \vee t$	(D. S. 9)		
11) $-x$	(P. P. 5, 10)		
12) $-x \vee b$	(D. S. 11)		
13) $-k$	(P. P. 1, 12)		

9. ariketaren emaitzak.

Lehenengo emaitza:		Bigarren emaitza:	
8) $-p$	(S. 2)	8) $-k \rightarrow t$	(S. H. 4, 6)
9) k	(T. T. 4, 8)	9) $k \vee x$	(P. P. 5, 8)
10) $k \vee x$	(D. S. 9)	10) $-a$	(T. P. 1, 9)
11) $-a$	(T. P. 1, 10)	11) $-a \vee b$	(D. S. 10)
12) $-a \vee b$	(D. S. 11)	12) $-m$	(P. P. 7, 11)
13) $-m$	(P. P. 7, 12)		

- Disjuntzioa sartzeko erregela eta aurrez emandako erregela guztiak aplikatzeko egindako ariketen emaitzak (3)

10. ariketa:		11. ariketa:	
5) -m	(S. 1)	7) k	(S. 1)
6) -m ∨ -s	(D. S. 5)	8) k ∨ t	(D. S. 7)
7) d	(T. P. 2, 6)	9) -r	(T. T. 5, 8)
8) -x	(P. P. 3, 7)	10) (a ∨ b)	(P. P. 3, 9)
9) -x ∨ -k	(D. S. 8)	11) m ∨ x	(S. D. 2, 4, 10)
10) a	(T. T. 4, 9)	12) m	(T. P. 6, 11)
11) a ∨ -p	(D. S. 10)		

12. ariketa:	
7) -m	(S. 6)
8) -m ∨ t	(D. S. 7)
9) -s	(P. P. 4, 8)
10) -s ∨ r	(D. S. 8)
11) -z	(T. T. 3, 10)
12) p	(T. P. 5, 11)
13) -b	(P. P. 2, 12)
14) x	(T. T. 1, 13)

4.11. BALDINTZABIKOAREN EZABAPENAREN ERREGELA (B. E.)

$\dfrac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q}$	$\dfrac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$
$\dfrac{P \leftrightarrow Q}{(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)}$	

Erregela honek hau dio: premisa modura baldintzabiko bat badaukagu, bi baldintza atera ditzakegu konklusio modura, non aurrekaria eta atzekaria baldintzabikoaren elementuak diren.

- Hizkuntza arrunteko adibideak

1) Liburuak idazten badituzu soilik bihurtuko zara idazle. __________ 2) Liburuak idazten badituzu, idazle bihurtuko zara.	1) $p \leftrightarrow r$ __________ 2) $p \rightarrow r$ (B. 1)
1) Liburuak idazten badituzu soilik bihurtuko zara idazle. __________ 2) Idazle bihurtzen bazara, liburuak idatziko dituzu.	1) $p \leftrightarrow r$ __________ 2) $r \rightarrow p$ (B. 1)

- Adibideak

1. ad.: 1) $p \leftrightarrow (-k \wedge -r)$ __________ 2) $p \rightarrow (-k \wedge -r)$ (B. 1) 3) $(-k \wedge -r) \rightarrow p$ (B. 1)	2. ad.: 1) $-p \leftrightarrow m$ __________ 2) $-p \rightarrow m$ (B.1) 3) $m \rightarrow -p$ (B.1)
3. ad.: 1) $(p \wedge -k) \leftrightarrow (r \vee s)$ __________ 2) $(r \vee s) \rightarrow (p \wedge -k)$ (B. 1) 3) $(p \wedge -k) \rightarrow (r \vee s)$ (B. 1)	4. ad.: 1) $m \leftrightarrow k$ __________ 2) $m \rightarrow k$ (B. 1) 3) $k \rightarrow m$ (B. 1)
5. ad.: 1) $-a \leftrightarrow p$ __________ 2) $-a \rightarrow p$ (B. 1) 3) $p \rightarrow -a$ (B. 1)	6. ad.: 1) $-m \leftrightarrow -k$ __________ 2) $-k \rightarrow -m$ (B. 1) 3) $-m \rightarrow -k$ (B. 1)

Beste erregelekin egin dugun bezala, erregela hau proposizio bihurtzen badugu:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

eta

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

eta haien egia-taulak egiten baditugu, ikusiko dugu tautologia bat dela, edo kasu guztietan egia dela:

(p	↔	q)	→	(q	→	p)
1	1	1	**1**	1	1	1
1	0	0	**1**	0	0	1
0	0	1	**1**	1	1	0
0	1	0	**1**	0	1	0

eta

(p	↔	q)	→	(p	→	q)
1	1	1	**1**	1	1	1
1	0	0	**1**	1	0	0
0	0	1	**1**	0	1	1
0	1	0	**1**	0	1	0

- Baldintzabikoaren ezabapenaren erregela eta aurreko beste erregelak aplikatzeko ariketak (1)

1. ariketa. D: -m 1) -d → (-p ^ t) 2) r ^ -k 3) (a ∨ -p) → -x 4) -d ↔ -k 5) (-x ^ r) → -m	2. ariketa. D : -x 1) (-b → -k) ^ (r ∨ z) 2) t → -(-b ↔ -k) 3) -s → -d 4) -k → -b 5) (-m → -d) → -x 6) -t → (-m ↔ -s)
3. ariketa. D: -x 1) (-b → r) → -m 2) -k → r 3) (-m ∨ t) → -p 4) x → p 5) -b ↔ -k	4. ariketa. D: -z 1) -(-t ↔ b) → -k 2) -b ^ -x 3) -m ∨ -t 4) (-m ∨ r) → -a 5) k ^ -d 6) z → a

- Baldintzabikoaren ezabapenaren erregela eta aurreko beste erregelak aplikatzeko ariketak (2)

5. ariketa. D: -z 1) -x ↔ -k 2) (-p ∧ k) → -t 3) x ∧ -r 4) z → t 5) -k ∨ -s 6) (-s ∧ -r) → -p	6. ariketa. D: -z 1) -s ↔ -k 2) (-p → -x) → t 3) -k → -x 4) a → -r 5) -p → -s 6) -t ∨ a 7) -r → -z
7. ariketa. D: -k 1) -(b ∨ s) ∨ t 2) -x ↔ m 3) a ∧ -p 4) (t ∧ -p) → -k 5) -b → -(m → -x)	8. ariketa. D: -m → r 1) -[-(r ↔ -m) → -x] → (k ∧ -d) 2) -p ∧ -(k ∧ -d) 3) -p → (a ∧ x)
9. ariketa. D: -m 1) (k ∨ -p) → -s 2) (-t ∨ b) → -m 3) (-x ↔ -k) ∧ (r ∨ -p) 4) x 5) (-s ∨ -p) → -t	10. ariketa. D: -m 1) -x → -k 2) -(r ∨ -p) → -(-x ↔ -k) 3) r → s 4) -k → -x 5) -p → b 6) (s ∨ b) → -m
11. ariketa. D: r 1) -z → r 2) p ↔ s 3) a ∧ -s 4) m ∨ p 5) m → -x 6) z → -(-x ∨ t)	12. ariketa. D: -s 1) -x → -s 2) x → -z 3) -r ∨ z 4) m ↔ b 5) r ∧ -b 6) -m → r

- Baldintzabikoaren ezabapenaren erregela eta aurreko beste erregelak aplikatzeko egindako ariketen emaitzak (1)

1. ariketa: 6) $-k \rightarrow -d$ (B. 4) 7) $-k$ (S. 2) 8) $-d$ (P. P. 6, 7) 9) $-p \wedge t$ (P. P. 1, 8) 10) $-p$ (S. 9) 11) $a \vee -p$ (D. S. 10) 12) $-x$ (P. P. 3, 11) 13) r (S. 2) 14) $-x \wedge r$ (K. S. 12, 13) 15) $-m$ (P. P. 5, 14)	2. ariketa: 7) $-b \rightarrow -k$ (S. 1) 8) $-b \leftrightarrow -k$ (B. S. 4, 7) 9) $-t$ (T. T. 2, 8) 10) $-m \leftrightarrow -s$ (P. P. 6, 9) 11) $-m \rightarrow -s$ (B. 10) 12) $-m \rightarrow -d$ (S. H. 3, 11) 13) $-x$ (P. P. 5, 12)
3. ariketa: 6) $-b \rightarrow -k$ (B. 5) 7) $-b \rightarrow r$ (S. H. 2, 6) 8) $-m$ (P. P. 1, 7) 9) $-m \vee t$ (D. S.. 8) 10) $-p$ (P. P. 3, 9) 11) $-x$ (T. T.4, 10)	4. ariketa: 7) k (S. 5) 8) $-t \leftrightarrow b$ (T. T. 1, 7) 9) $-t \rightarrow b$ (B. 8) 10) $-b$ (S. 2) 11) t (T. T. 9, 10) 12) $-m$ (T. P. 3, 11) 13) $-m \vee r$ (D. S. 12) 14) $-a$ (P. P. 4, 13) 15) $-z$ (T. T. 6, 14)
5. ariketa: 7) x (S. 3) 8) $-k \rightarrow -x$ (B. 1) 9) k (T. T. 7, 8) 10) $-s$ (T. P. 5, 9) 11) $-r$ (S. 3) 12) $-s \wedge -r$ (K. S. 10, 11) 13) $-p$ (P. P. 6, 12) 14) $-p \wedge k$ (K. S. 9, 13) 15) $-t$ (P. P. 2, 14) 16) $-z$ (T. T. 4, 15)	6. ariketa: 8) $-s \rightarrow -k$ (B. 1) 9) $-p \rightarrow -k$ (S. H. 5, 8) 10) $-p \rightarrow -x$ (S. H. 3, 9) 11) t (P. P. 2, 10) 12) a (T. P. 6, 11) 13) $-r$ (P. P. 4, 12) 14) z (P. P. 7, 13)

7. ariketa:		8. ariketa:	
6) m → -x	(B. 2)	4) -(k ^ -d)	(S. 2)
7) b	(T. T. 5, 6)	5) -(r ↔ -m) → -x	(T. T. 1, 4)
8) b v s	(D. S. 7)	6) -p	(S. 2)
9) t	(T. P. 1, 8)	7) a ^ x	(P. P. 3, 6)
10) -p	(S. 3)	8) x	(S. 7)
11) t ^ -p	(K. S. 9, 10)	9) r ↔ -m	(T. T. 5, 8)
12) -k	(P. P. 4, 11)	10) -m → r	(B. 9)

- Baldintzabikoaren ezabapenaren erregela eta aurreko beste erregelak aplikatzeko egindako ariketen emaitzak (2)

9. ariketa:		10. ariketa:	
6) -x ↔ -k	(S. 3)	7) (-x ↔ -k)	(B. S. 1, 4)
7) -k → -x	(B. 6)	8) r v -p	(T. T. 2, 7)
8) k	(T, T. 4, 7)	9) s v b	(S. D. 3, 5, 8)
9) k v -p	(D. S. 8)	10) -m	(P. P. 6, 9)
10) -s	(P. P. 1, 9)		
11) -s v -p	(D. S. 10)		
12) -t	(P. P. 5, 11)		
13) -t v b	(D. S. 12)		
14) -m	(P. P. 2,13)		
11. ariketa:		**12. ariketa:**	
7) -s	(S. 3)	7) -b	(S. 5)
8) p → s	(B. 2)	8) m → b	(B. 4)
9) -p	(T. T. 7, 8)	9) -m	(T. T. 7, 8)
10) m	(T. P. 4, 9)	10) r	(P. P. 6, 9)
11) -x	(P. P. 5, 10)	11) z	(T. P. 3, 10)
12) -x v t	(D. S.11)	12) -x	(T. T. 2, 11)
13) -z	(T. T. 6, 12)	13) -s	(P. P. 1, 12)
14) r	(P. P. 1, 13)		

5

Beste erregela batzuk

5.1. BESTE ERREGELA BATZUK

Orain arte, erregelarik inportanteenak aztertu eta haien adibideak ipini ditugu; dena dela, jakin behar dugu beste erregela asko ere badaudela. Hemendik aurrera, lan hau amaitzeko, beste erregela batzuk aipatuko ditugu, baina, aurrekoetan ez bezala, aipatu besterik ez dugu egingo.

5.1.1. Disjuntzioaren sinplifikazioaren erregela

$$\begin{array}{c} P \vee Q \\ P \rightarrow R \\ Q \rightarrow R \\ \hline R \end{array}$$

5.1.2. Baldintzabikoaren propietate trukakorra

$$\begin{array}{c} P \leftrightarrow Q \\ \hline Q \leftrightarrow P \end{array}$$

5.1.3. Baldintzabikoa sartzeko erregela

$$\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow P \\ \hline P \leftrightarrow Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \\ \hline P \leftrightarrow Q \end{array}$$

5.1.4. Baldintzabikoaren propietate trantsitiboa

$$\begin{array}{c} P \leftrightarrow Q \\ Q \leftrightarrow R \\ \hline P \leftrightarrow R \end{array}$$

5.1.5. “Silogismo suntsitzailea” erregela

$$\begin{array}{l} 1)\ \ -P \vee -Q \\ 2)\ \ R \rightarrow P \\ 3)\ \ S \rightarrow Q \\ \hline 4)\ \ -R \vee -S \end{array}$$

5.1.6. Disjuntzioaren propietate trukakorra

$$\frac{P \vee Q}{Q \vee P}$$

5.1.7. Konjuntzioaren propietate trukakorra

$$\frac{P \wedge Q}{Q \wedge P}$$

5.1.8. De Morganen legeak

$P \vee Q$ $-(-P \wedge -Q)$	$-(P \vee Q)$ $-P \wedge -Q$
$P \wedge Q$ $-(-P \vee -Q)$	$-(P \wedge Q)$ $-P \vee -Q$

De Morganen legeak aplikatzeko, hiru pauso eman behar dira:

1) Disjuntzioaren ordez, konjuntzioa ezarri (edo alderantziz)
2) Disjuntzioaren edo konjuntzioaren osakide bakoitza ezeztatu
3) Formula edo proposizio osoa ezeztatu

Lanaren justifikazioa 6

6.1. LANAREN JUSTIFIKAZIOA

Amaitzeko, azken lerro hauetan esan nahi genuke zergatik eta nola egin dugun lan hau.

Hasteko, zera jakin behar dugu: oso inportantea da ezagutzea nola pentsatzen dugun, nola argudiatzen dugun, eta nola justifikatzen garen besteen aurrean, horretarako guztirako zer bide hartzen ditugun. Baina, era berean, jakin behar dugu geure pentsamendua hitzez espresatzen ez badugu ez dela pentsamendurik izango.

Batzuetan, logikari esker, gai izango gara pentsamendu bat azaltzeko, eta osatzen ditugun esaldiak perfektuak izango dira, baina horrek ez du ezer esaten pentsamenduaren interesari buruz; hau da, esan duguna lelokeria galanta izan daiteke.

Gure pentsamenduak –lelokeria izanda zein guztiz munta handikoa izanda, kasu bietan– bai geure buruarentzat bai besteontzat ulergarria izateko, ondo osatuta egon behar du, logikaren arabera ondo osatuta. Logikaren tresnez baliatuz, gure eskarmentua/inpresioak/jakinduriak gauzatu egiten dira, hitzetara pasatuz, eta, horrela eginez, geure buruaren aurrean eta mundu aurrean jartzen gaitu hizkuntzak bere egiturarekin.

Horregatik, geure pentsamendua aztertuko badugu, aztertu behar dugu zer motatako hizkuntzan adierazten dugun.

Ikusi dugunez, lan honetan zenbait gai landu ditugu: zer den hizkuntza, zer hizkuntza mota dauden, zein den hizkuntzarik egokiena gure arrazonamenduak adierazteko, eta zer argudio mota erabiltzen ditugun.

Agian, askotan kontrakoa uste dugu: nahiz eta argudiatzea inportantea den, hizkuntza logikoa ez da beti biderik aproposena izango, eta, agian, metaforen bidez, olerkien bidez logikaz baino hobeto adieraziko dugu mundua:

“maite ditut maite gure bazterrak / lanbroak ezkutatzen dituenean”

Baina, horretan, olerkietan, sentimenduen esparruan ere, jakin behar dugu nola pentsatzen dugun, eta hori azaltzeko egin dugu lan hau.

Beste alde batetik, egin dugun lanaren egitura nahiko praktikoa izatea nahi izan dugu, filosofia filosofatuz ikasten dela pentsatzen dugulako, Kantek bezala. Horregatik, azalpenak ondo ulertzeko, azaldu dugun heinean, ariketa asko ipini dugu.

Azken finean, denok egin beharko genuke gurea goiburu hau: *sapere aude* (ausartu jakitera). Amaitzeko, zalantza bat daukagu: egokiro azaldu dugu azaldu beharrekoa?: “mintza ezin daitekeenaz, hobe isildu”, zioen Wittgensteinek; zehaztasuna zeukan buruan filosofo handi hark; geure zalantza ere ildo horretatik doa: izan ote gara behar bezain zehatzak?

7 Bibliografia

7. BIBLIOGRAFIA

- DEAÑO, Alfredo: *Introducción a la lógica formal*, Madril, Alianza Un., 1983.
- CORTINA, Adela: *Filosofía* 1,Etxebarri, Zubia-Santillana, 2002.
- RODRIGUEZ LOZANO, Vicente: *Introducción a la lógica simbólica*, Madril, Akal 1985.
- BRONCANO, Rosa; PEREZ, Josal: *Filosofiako apunteak*, Mungia BHI.
- de ECHANO, Javier; MARTINEZ, Eduardo; MONTARELO, Pedro; NAVLET, Isabel: *Filosofía Arje B. U. P. 3*, Bartzelona, Vicens-Vives, 1991.
- GARRIDO, Manuel: *Lógica simbólica*, Madril, Tecnos, 1993.
- LARIZGOITIA, Arantza: *Soziologiako apunteak*, Madril, 1989.
- ARSUAGA, Juan Luis; MARTINEZ, Ignacio: *La especie elegida*, Madril, Temas de hoy, 2003.
- QUINE, W.V.: *Los métodos de la Lógica*, Bartzelona, Ariel, 1981
- AURREKOETXEA, Martin; AXPE, Xabier; LAZKANO, Jon; PEREZ, Josal, *Filosofia DBHO 1*; Bilbo, Ibaizabal, 2003

Eusko Jaurlaritzaren Argitalpen Zerbitzu Nagusia
Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco

ISBN: 978-84-457-2926-7
9 788445 729267

Salneurria: 14 €